

Cluster expansion approach to the **BCS-BEC crossover**

作道 直幸

理化学研究所 仁科センター (学振PD)

共同研究者

上田正仁 (東大)

川上則雄 (京大)

西田祐介 (東工大)

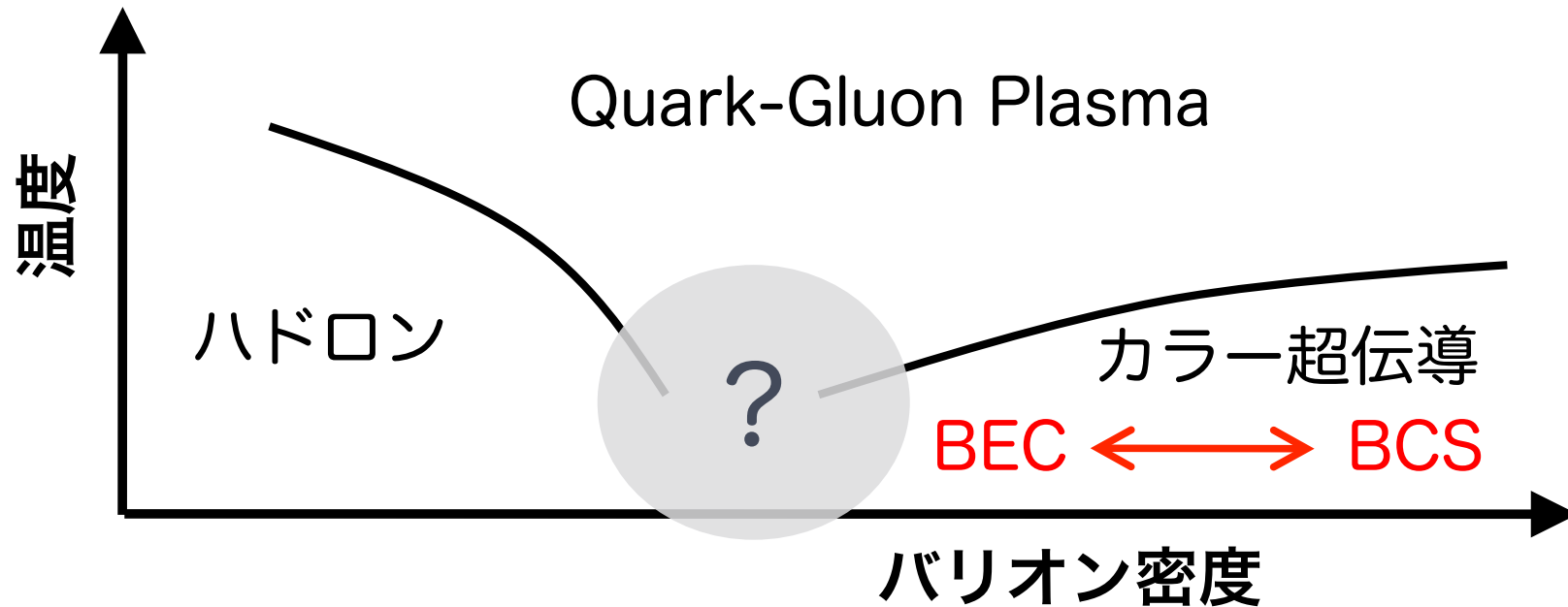
文献

[1] NS, NK & MU, PRA 85, 043601 (2012).

[2] NS, NK & MU, arXiv:1202.6532 (2012).

[3] NS, YN & MU, arXiv:1310.4665 (2013).

QCD相図におけるBCS-BEC crossover



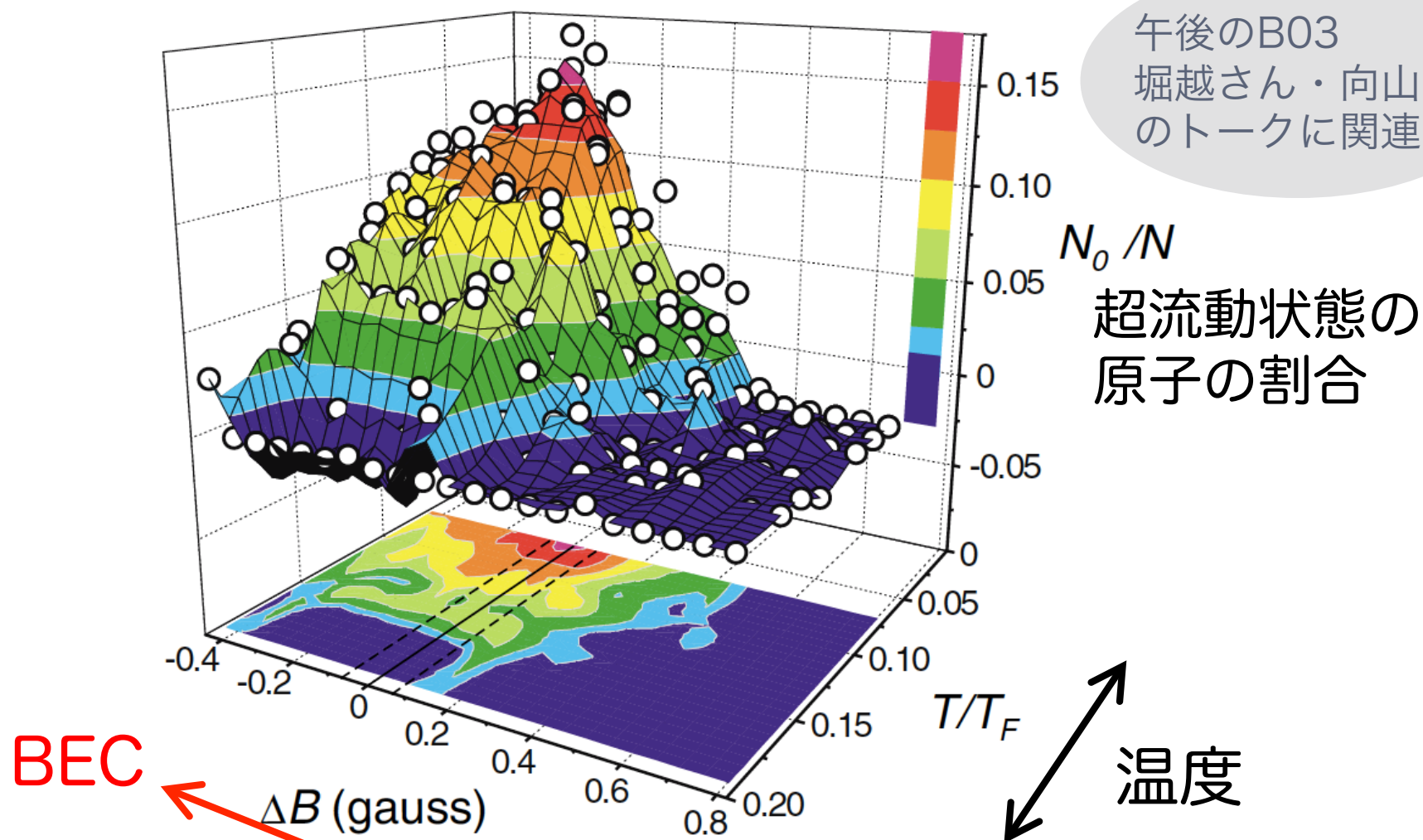
本研究の対象

BCS-BECクロスオーバーのsimple model
= 接触相互作用のスピンの1/2 Fermi気体

$$H = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} - g \sum_{k_1, k_2, k_3} c_{k_1\uparrow}^+ c_{k_2\downarrow}^+ c_{k_3\downarrow} c_{k_1+k_2-k_3\uparrow}$$

冷却原子気体で実現されたBCS-BECクロスオーバー

午後のB03
堀越さん・向山さん
のトークに関連



磁場を変えると
原子間相互作用が変わる

Regal, Greiner, & Jin, PRL (2004).
Zwierlein, *et al.*, PRL (2004).

→ クラスター展開による

BCS-BECクロスオーバーの研究

熱力学関数のフガシティ展開

$$\frac{\lambda^3}{V} \ln e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad z = e^{\beta\mu}$$

≡ ビリアル展開：

位相空間密度による展開

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\lambda^3 \frac{N}{V} \right)^n$$

← フェルミ気体

- ・ 引力弱

→ Cooper pairing
(BCS型超流動)

- ・ 引力強

→ 分子ボソンのBEC

強相関多体系のため

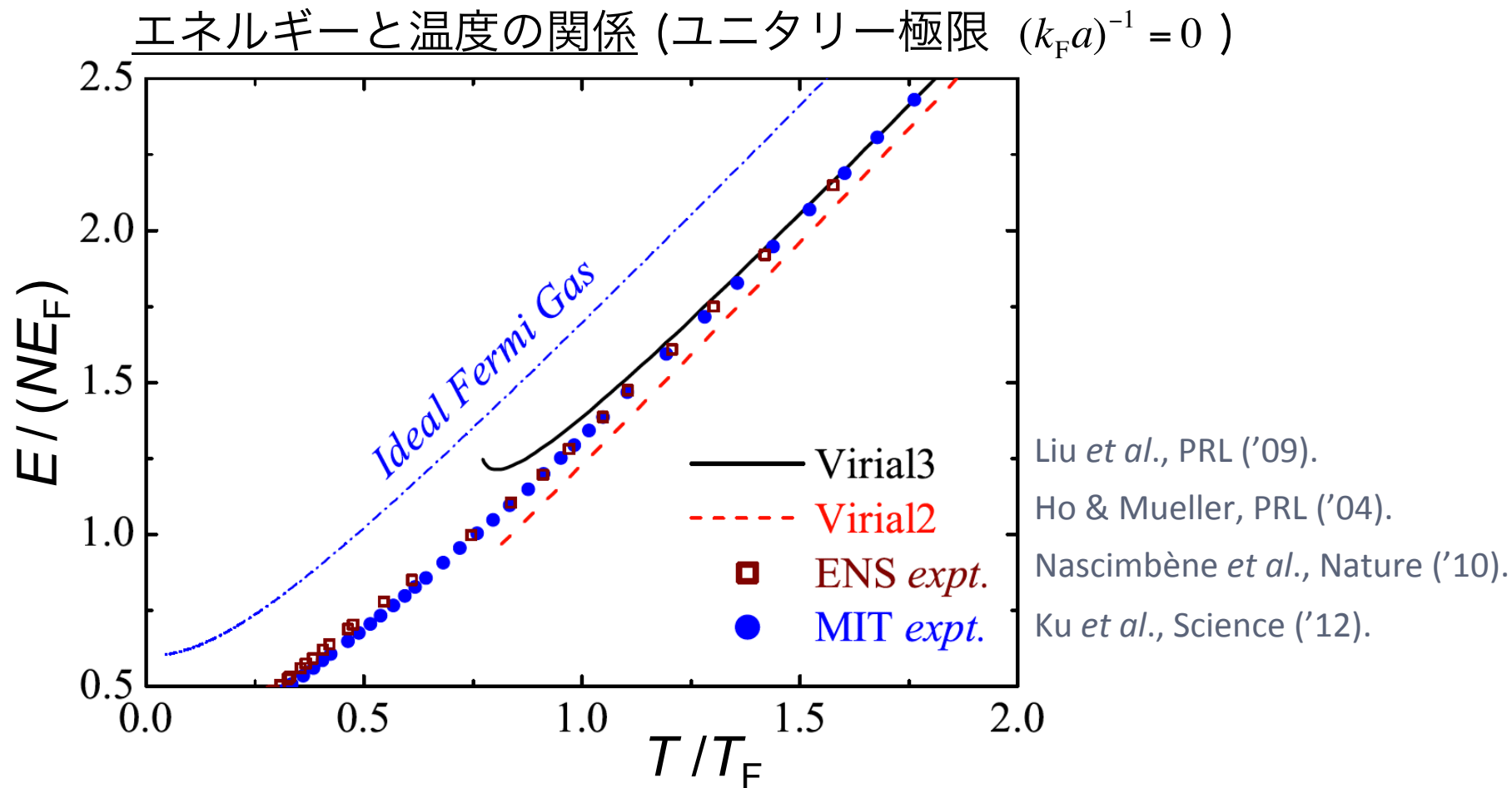
BCSからBECまで説明する

厳密な理論はない

→ 様々な理論で相補的な理解

▶ なぜクラスター展開に注目するのか？

5/14



相互作用が強いクロスオーバー領域では**小さい展開パラメーターがない**
→ クラスター展開は **T_F 以上の高温の希薄量子気体**で有効

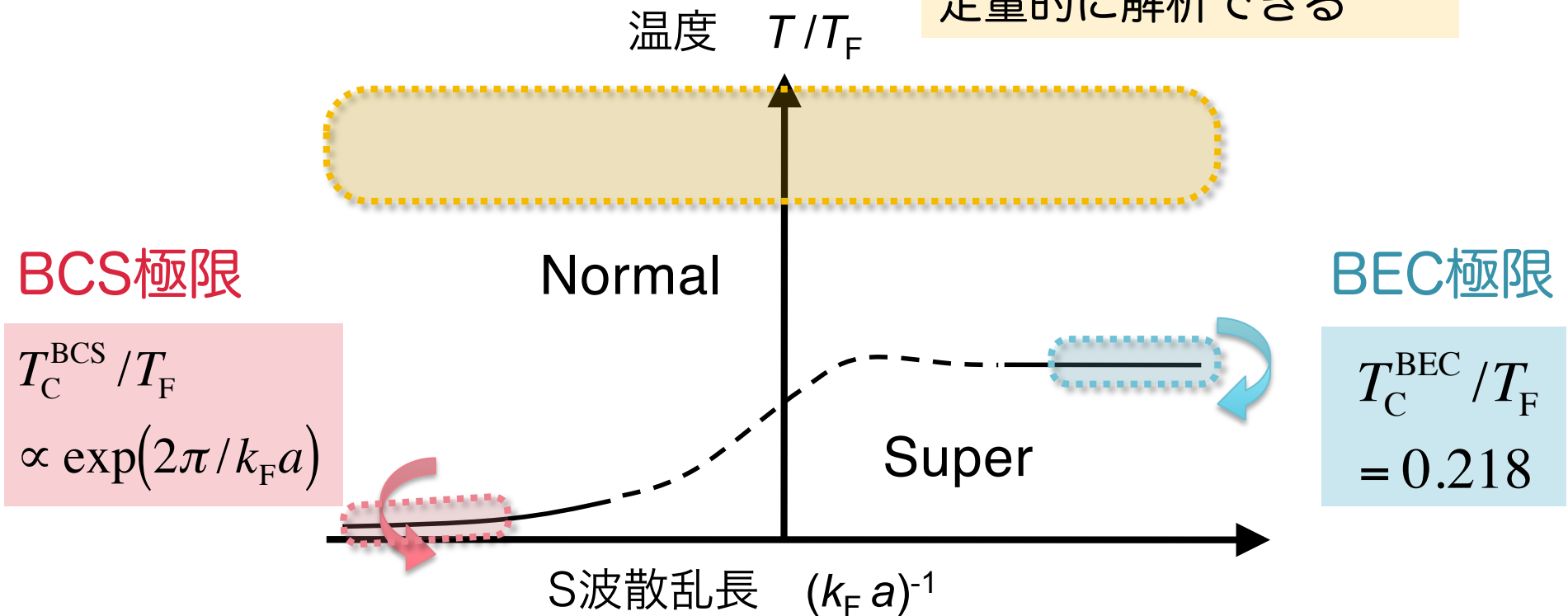
Figure: X.-J. Liu, Phys. Rep. ('13)

▶ クラスター展開に基づいて相転移を解析したい

6/14

BCS-BEC crossoverの相図

高温はクラスター展開で
定量的に解析できる



クラスター展開で**相転移温度**を計算できるか？

→ 有限次で展開を打ち切るとムリ ($\because$ 多項式には特異性がない)

→ **無限次**の項を系統的に計算する手法が必要

▶ クラスター展開は、Lee-Yangの方法で系統的に計算できる

7/14

定義

(基本グラフ) = (入次数と出次数が等しいバーテックスで作られる連結な有向グラフ)

定理 Lee and Yang ('60)

$$\ln \Xi = \sum (\text{全ての相異なる基本グラフ})$$

$$= \text{[1 vertex loop]} + \text{[2 vertices loop]} + \text{[3 vertices loop]} + \dots$$

$$+ \text{[2 vertices, 2 loops]} + \text{[2 vertices, 1 loop, 1 vertex loop]} + \dots$$

$$+ \text{[3 vertices, 3 loops]} + \dots$$

- ・ 点 = クラスター関数
- ・ 矢印の個数 = z の次数

▶ Lee-Yangの方法は、相互作用と量子統計性の効果を分離する

8/14

“Vertex” = cluster function obeying Boltzmann statistics

粒子を区別する統計性

z^2 の項への量子統計性の寄与

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: A circle with two vertices, each having two incoming arrows. The top-left vertex is labeled with blue arrows and red labels } k_2, \sigma_2 \text{ and } k_1, \sigma_1. \text{ The bottom-right vertex is labeled with red arrows and blue labels } k_1, \sigma_1 \text{ and } k_2, \sigma_2. \\
 & = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \sum_{k_1, k_2} \text{Diagram: Two separate vertices, each with two incoming arrows. The top-left vertex is labeled with blue arrows and red labels } k_2, \sigma_2 \text{ and } k_1, \sigma_1. \text{ The bottom-right vertex is labeled with red arrows and blue labels } k_1, \sigma_1 \text{ and } k_2, \sigma_2. \\
 & = -2z^2 \sum_{k_1, k_2} \langle k_1 | e^{-\beta H_1} | k_2 \rangle \langle k_2 | e^{-\beta H_1} | k_1 \rangle \\
 & = -2z^2 \sum_k e^{-\beta k^2 / m}
 \end{aligned}$$

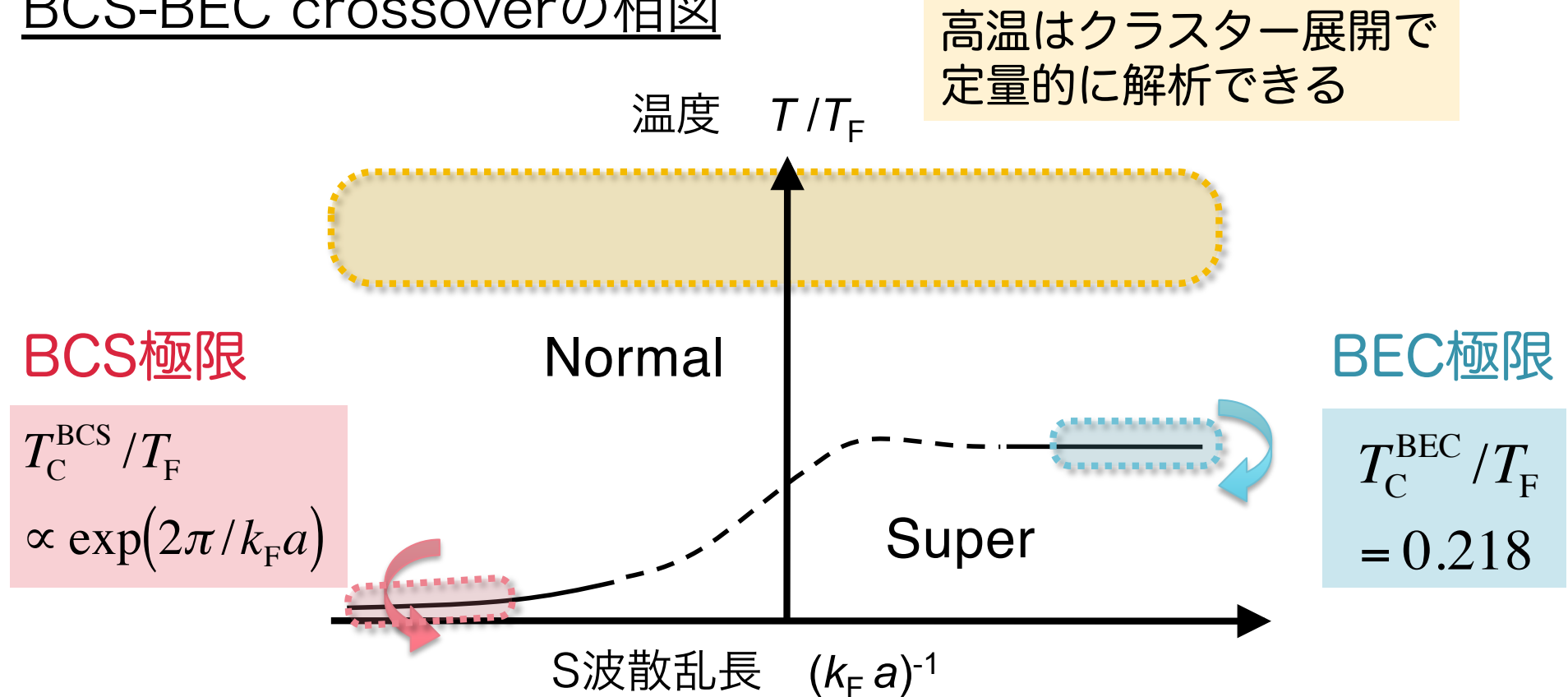
z^2 の項への相互作用の寄与

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram: Two circles connected at a central vertex. Each circle has two incoming arrows. The top-left vertex is labeled with red arrows and red labels } k_1, \sigma_1 \text{ and } k_2, \sigma_2. \text{ The bottom-right vertex is labeled with blue arrows and blue labels } k_1, \sigma_1 \text{ and } k_2, \sigma_2. \\
 & = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \sum_{k_1, k_2} \text{Diagram: A central vertex with four incoming arrows. The top-left and bottom-right arrows are red and labeled } k_1, \sigma_1. \text{ The top-right and bottom-left arrows are blue and labeled } k_2, \sigma_2. \\
 & = z^2 \sum_{k_1, k_2} \langle k_1, k_2 | U^{(2)} | k_1, k_2 \rangle \\
 & \quad \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 | U^{(2)} | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle \\
 & = \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 | e^{-\beta H_2} | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle - \langle \vec{k}_1 | e^{-\beta H_1} | \vec{k}_1 \rangle \langle \vec{k}_2 | e^{-\beta H_1} | \vec{k}_2 \rangle
 \end{aligned}$$

▶ クラスター展開に基づいて相転移を解析したい

9/14

BCS-BEC crossoverの相図



Lee-Yangの方法で相転移温度を定量的に解析できるか？

最終的にはクロスオーバー領域の解析を行いたいが、

本研究では、まずBCS/BEC極限の相転移温度の導出方法を調べる

▶ 以下の無限和からBCS/BEC極限の相転移温度が出ると期待

10/14

$$\ln \Xi = \sum (\text{全ての相異なる基本グラフ})$$

$$\cong \ln \Xi_{\text{ideal}} + P_{\text{lad}}$$

$$P_{\text{lad}} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{[diagram of } n \text{ loops]} = \text{[diagram of 2 loops]} + \text{[diagram of 3 loops]} + \text{[diagram of 4 loops]} + \dots$$

$$\text{[diagram of dashed line with arrow]} = \text{[diagram of solid line with arrow]} + \text{[diagram of solid line with arrow and one dot]} + \text{[diagram of solid line with arrow and two dots]} + \dots$$

周りのフェルミオンとの
量子交換効果 → フェルミ球

物理的要請

- ・ BCS側での**フェルミ球**
- ・ **ペアの形成**
(クーパーペア or 分子)
- ・ **ペアの量子交換効果**

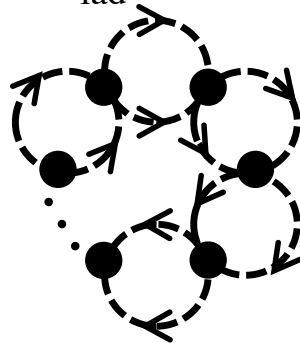
結果：BCS極限は正しく出る

11/14

要請 1

$$\ln \Xi \cong \ln \Xi_{\text{ideal}} + P_{\text{lad}}$$

$$P_{\text{lad}} = \sum_{n=1}^{\infty}$$



要請 2：相互作用が弱い極限を考える

$$\langle k_1', k_2' | U^{(2)} | k_1, k_2 \rangle$$

$$\cong -g(2\pi)^3 \delta_{\vec{k}_1' + \vec{k}_2' - \vec{k}_1 - \vec{k}_2} \times \int_0^\beta d\tau e^{-(\beta-\tau)(k_1'^2 + k_2'^2)/(2m)} e^{-\tau(k_1^2 + k_2^2)/(2m)}$$

$$\ln \Xi \cong \ln \Xi_{\text{ideal}} - \sum_{l \in Z} \int \frac{d^3 \vec{K}}{8\pi^3} \ln \left[\int \frac{d^3 \vec{k}}{8\pi^3} \frac{1 - n_F(\varepsilon_1) - n_F(\varepsilon_2)}{i\Omega_l - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\mu)} - \frac{1}{g} \right] + (\text{Constant})$$

$$\frac{m}{4\pi a} = -\frac{1}{g} + \int \frac{d^3 \vec{k}}{8\pi^3} \frac{1}{2\varepsilon} \quad \Omega_l = \frac{2\pi l}{\beta} \quad \varepsilon = \frac{k^2}{2m}$$

Nozières & Schmitt-Rinkの理論 ('85) と同値

- Thouless criterion
- 粒子数方程式

BCS極限

$$T_C^{\text{BCS}} / T_F \propto \exp(2\pi / k_F a)$$

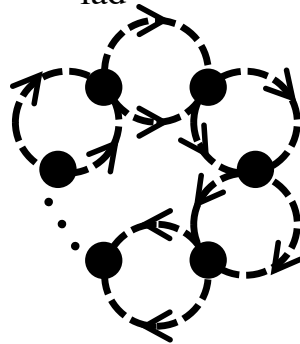
▶ 同様にBEC極限も正しく出る

12/14

要請 1

$$\ln \Xi \cong \ln \Xi_{\text{ideal}} + P_{\text{lad}}$$

$$P_{\text{lad}} = \sum_{n=1}^{\infty}$$



要請 2 : 相互作用が強い極限を考える

$$\langle k_1', k_2' | U^{(2)} | k_1, k_2 \rangle$$

$$\cong \langle k_1', k_2' | bs \rangle e^{-\beta E_b} \langle bs | k_1, k_2 \rangle$$

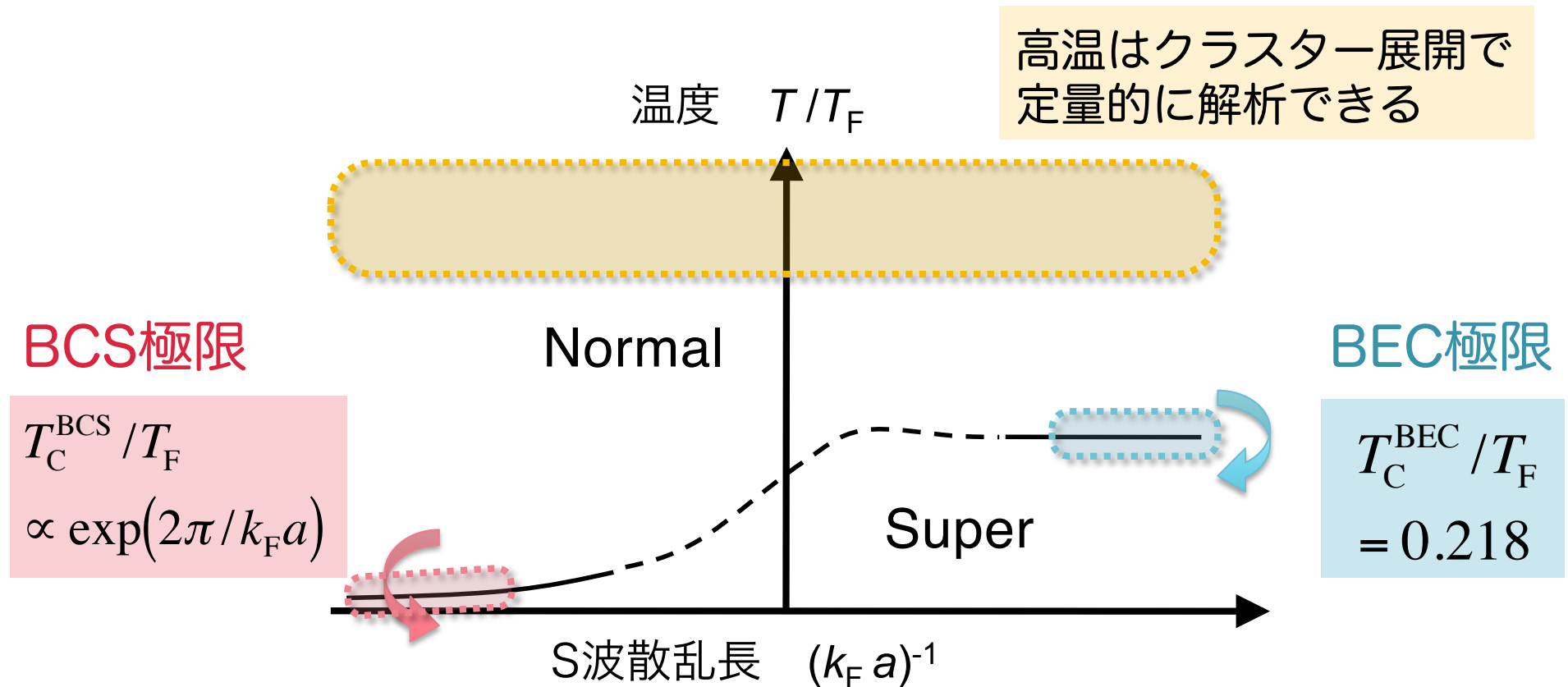


自由な分子ボソンの大分配関数が導出される

BEC極限

$$T_{\text{C}}^{\text{BEC}} / T_{\text{F}} = 0.218$$

ここまでの結果のまとめ



クラスター展開に基づいて

BCS & BEC極限の相転移温度が導出できた

▶ さらに、今回の無限和は数学的に良い性質を持つ

14/14

$$\ln \Xi \cong \ln \Xi_{\text{ideal}} + P_{\text{pair}}$$

$$P_{\text{pair}} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{diagram} = \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_K \sum_{p_1} \dots \sum_{p_n} A_K(p_1, p_2) A_K(p_2, p_3) \dots A_K(p_n, p_1)$$



$$A_K(\vec{p}', \vec{p}) = z^2 e^{-\beta K^2 / (4m)} \langle \vec{p}' | u^{(\text{rel})} | \vec{p} \rangle \sqrt{(1 - n_F(\vec{K}/2 + \vec{p}))(1 - n_F(\vec{K}/2 - \vec{p}))}$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \vec{p}' | u^{(\text{rel})} | \vec{p} \rangle \geq 0 \\ 1 - n_F(\vec{p}_1) \geq 0 \end{array} \right\} \dashrightarrow A_K(\vec{p}', \vec{p}) \geq 0$$

▶ ペロン・フロベニウスの定理

15/14

全ての成分が正の正方行列 A について以下が成り立つ

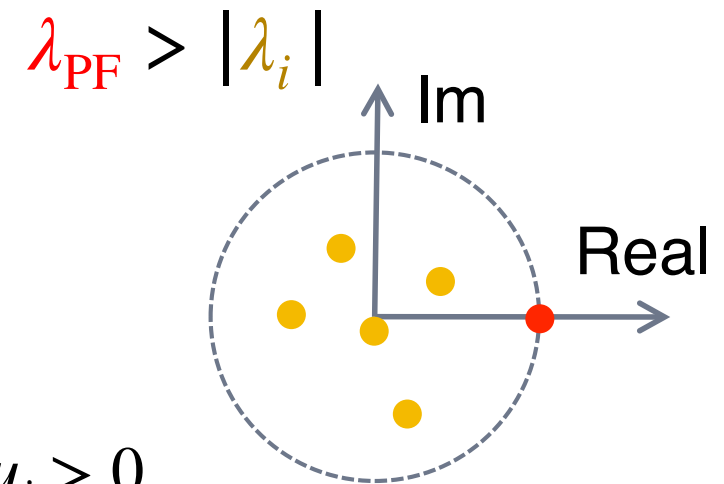
※ 前提条件が、表示に依存する

(1) 最大固有値 λ_{PF} が、正で唯一

ペロン・フロベニウス固有値

(2) 最大固有値の固有関数 $u=(u_i)$ が、 $u_i > 0$

ペロン・フロベニウス固有関数

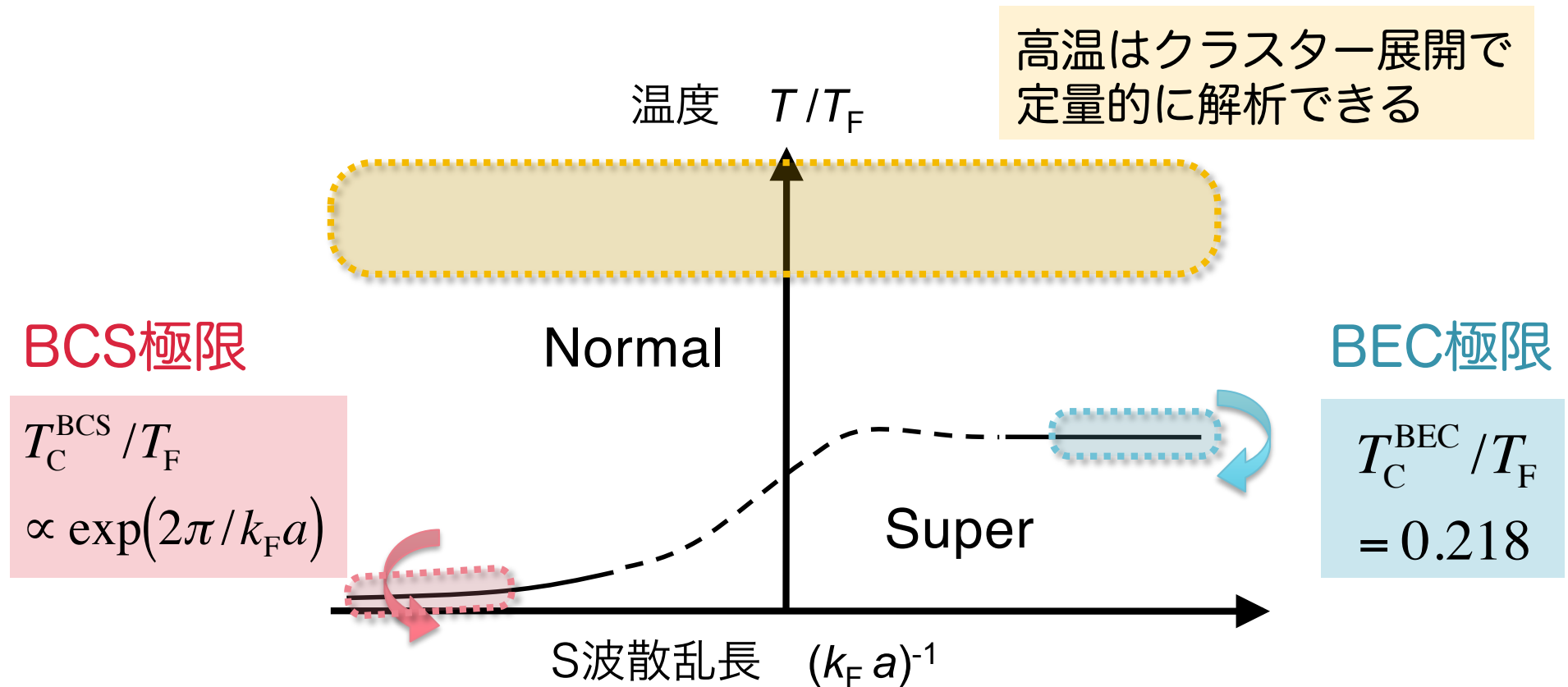


16/14

$$P_{\text{pair}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\text{diagram with } n \text{ vertices} \right) = \left(\text{diagram with 2 vertices} \right) + \left(\text{diagram with 3 vertices} \right) + \left(\text{diagram with 4 vertices} \right) + \dots$$

- 相転移点 ($\Leftrightarrow P_{\text{pair}}$ の特異点) は、
行列 $A_K(\vec{p}', \vec{p})$ のペロン・フロベニウス固有値で決まる
- ペロン・フロベニウス固有関数は、クーパーペアの波動関数

Summary



クラスター展開に基づいてBCS & BEC極限の相転移温度を導出した
今回の無限和の特異性は、ペロン・フロベニウス固有値で決まる
今後、クロスオーバー領域の解析を行いたい