第５回高エネルギーQCD・核子構造　勉強会
2015年４月５日

格子QCD計算で探る核子スピン構造 ー基礎編ー

佐々木　勝一　（東北大学）

TOHOKU
UNIVERSITY

お詫び

- このトークでは最新の核子スピン構造に関する格子QCD計算の結果については一切触れません。時間があればハイペロンβ崩壊の話はします。
- 格子QCDにおける基礎的知識（主に学生向け）についてのセミナーとなります。

量子色力学の基礎的確認事項

ゲージ変換と不変性

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right\} - \bar{\Psi}(x)\left(\gamma^{\mu}D_{\mu} + m\right)\Psi(x)$$

共変微分　$D_{\mu} = \partial_{\mu} - igA_{\mu}$

場の強さ　$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_{\mu}, D_{\nu}] = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - ig[A_{\mu}, A_{\nu}]$

$$\Psi(x) \to V(x)\Psi(x) \qquad D_{\mu} \to V(x)D_{\mu}V^{\dagger}(x)$$

$$\bar{\Psi}(x) \to \bar{\Psi}(x)V^{\dagger}(x) \qquad F_{\mu\nu} \to V(x)F_{\mu\nu}V^{\dagger}(x)$$

$$A_{\mu}(x) \to V(x)A_{\mu}(x)V^{\dagger}(x) + \frac{i}{g}V(x)(\partial_{\mu}V^{\dagger}(x))$$

非可換ゲージ理論(QCD)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \bar{\Psi}(x)\left(\gamma^{\mu}D_{\mu} + m\right)\Psi(x)$$

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - igA_{\mu}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_{\mu}, D_{\nu}]$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right\} - \bar{\Psi}(x)\left(\gamma^{\mu}D_{\mu} + m\right)\Psi(x)$$

形式上、可換ゲージ理論と同じ形

非可換ゲージ理論(QCD)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \bar{\Psi}(x)\left(\gamma^{\mu}D_{\mu} + m\right)\Psi(x)$$

$$\Downarrow$$

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - igA_{\mu}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_{\mu}, D_{\nu}]$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right\} - \bar{\Psi}(x)\left(\gamma^{\mu}D_{\mu} + m\right)\Psi(x)$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}$$

3次元ベクトル(SU(3)の基本表現)

$$F_{\mu\nu}(x) = \sum_{a=1}^{8} F^{a}_{\mu\nu}(x)\frac{\lambda^a}{2}$$

λ_a ： ゲルマン行列

$$A_{\mu}(x) = \sum_{a=1}^{8} A^{a}_{\mu}(x)\frac{\lambda^a}{2}$$

3行３列のエルミートなトレースレス行列
(SU(3)の随伴表現)

非可換ゲージ理論(QCD)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \bar{\Psi}(x)\left(\gamma^{\mu}D_{\mu} + m\right)\Psi(x)$$

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - igA_{\mu}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_{\mu}, D_{\nu}]$$

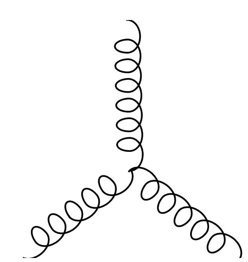
$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right\} - \bar{\Psi}(x)\left(\gamma^{\mu}D_{\mu} + m\right)\Psi(x)$$

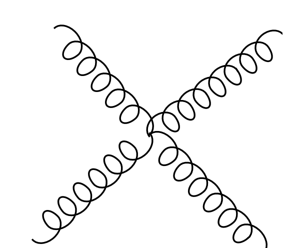
可換ゲージ理論との決定的な違い

非可換性に由来

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_{\mu}, D_{\nu}] = \partial_{\mu}A_{\mu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - \boxed{ig[A_{\mu}, A_{\nu}]}$$

グルーオン自己相互作用





ゲージ変換

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right\} - \bar{\Psi}(x)\left(\gamma^\mu D_\mu + m\right)\Psi(x)$$

ラグランジアンは以下のゲージ変換に対して不変

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &\to V(x)\Psi(x) \\
\bar{\Psi}(x) &\to \bar{\Psi}(x)V^\dagger(x) \\
A_\mu(x) &\to V(x)A_\mu(x)V^\dagger(x) + \tfrac{i}{g}V(x)(\partial_\mu V^\dagger(x))
\end{aligned}$$

ゲージ変換Vは3行３列の複素行列で、全体の複素数の位相だけを変える変換は含まない（$\det\{V\}=1$）

$$V(x) = \exp\{i\sum_{a=1}^{8}\theta^a(x)\frac{\lambda^a}{2}\}$$

$$\begin{aligned}
D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu &\to V(x)D_\mu V^\dagger(x) \\
F_{\mu\nu} = \tfrac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] &\to V(x)F_{\mu\nu}V^\dagger(x)
\end{aligned}$$

QEDにおいては$F_{\mu\nu}$自体がゲージ不変であったが、非可換理論では共変であって、**不変でない。**

走る結合定数と漸近的自由

ゲージ結合定数は、エネルギー・スケールに依存する

$$g = g(\mu)$$

μ ： **エネルギー・スケール**

質量次元を持たない微分演算子 $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$ **を導入して、結合定数の** μ **依存性を考える**

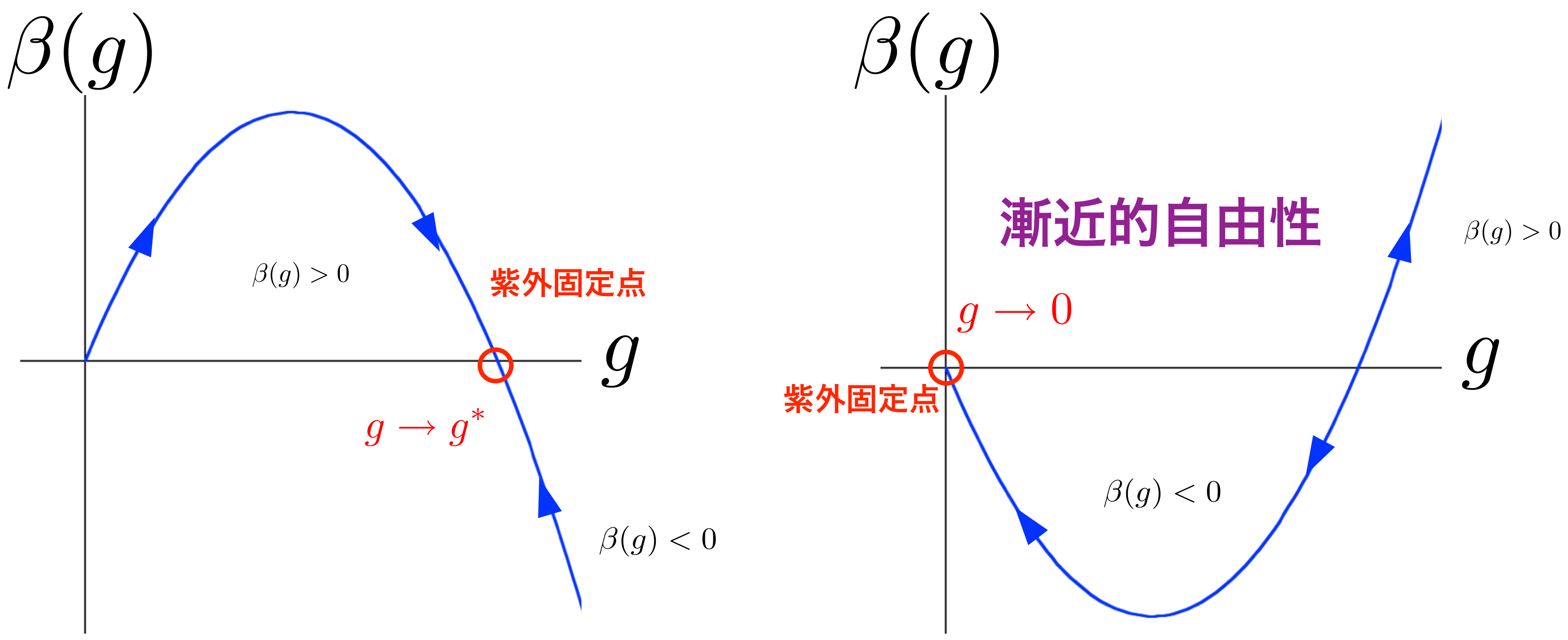
$$\beta(g) \equiv \mu\frac{\partial g}{\partial\mu}$$

$\beta(g) = 0$　　μ の変化に依らない点（固定点）：スケール不変性

$\beta(g) > 0$　　μ を大きくするとgも大きくなる

$\beta(g) < 0$　　μ を大きくするとgは小さくなる

走る結合定数と漸近的自由



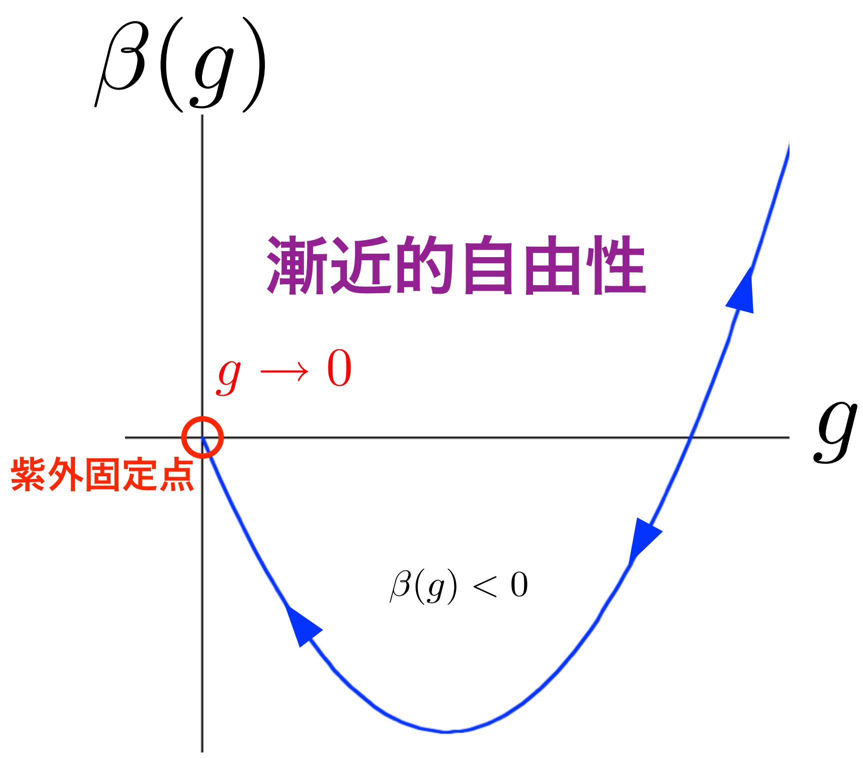
$$\mu \to \mathrm{Large}$$

$\beta(g) = 0$ 　 μの変化に依らない点（固定点）：スケール不変性

$\beta(g) > 0$ 　 μを大きくするとgも大きくなる

$\beta(g) < 0$ 　 μを大きくするとgは小さくなる

走る結合定数と漸近的自由



QCDでは、、、、

$$\boxed{\frac{dg}{d\ln\mu} = -b_0 g^3 \qquad \text{ベキ級数の最低次}}$$

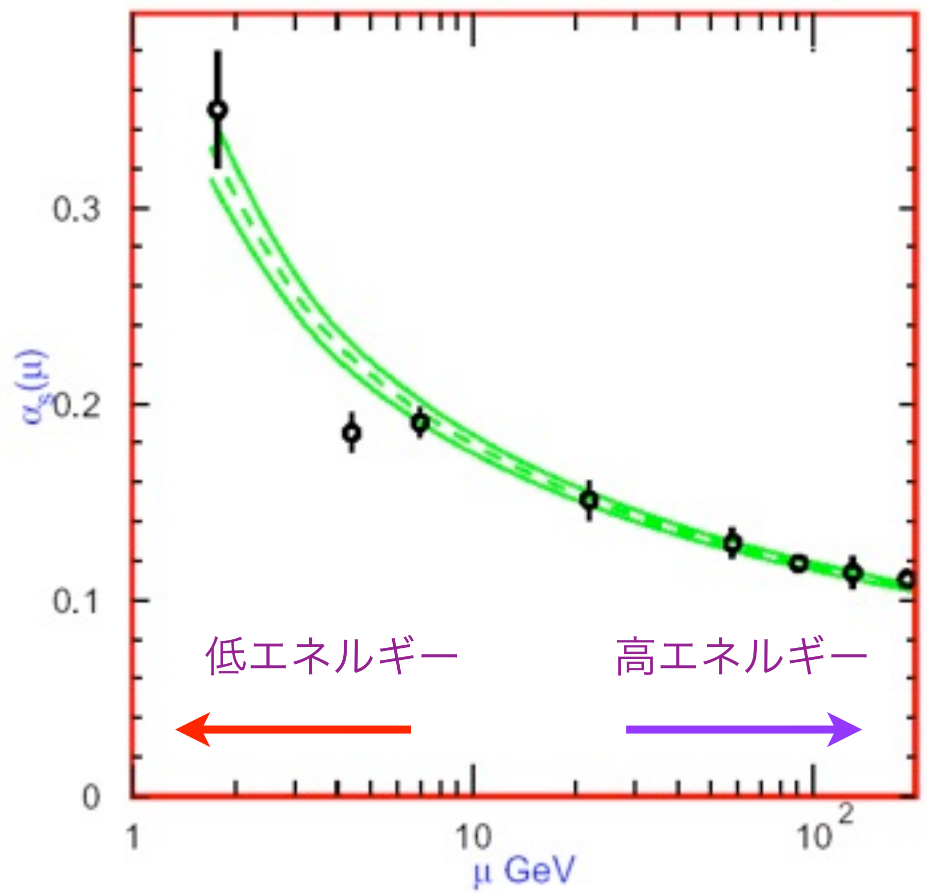
$$b_0 = \frac{11 - \frac{2}{3}n_f}{16\pi^2} > 0 \quad \text{for} \quad n_f < 16$$

$\mu \longrightarrow \infty$ では $g \longrightarrow 0$ （摂動展開がよい）

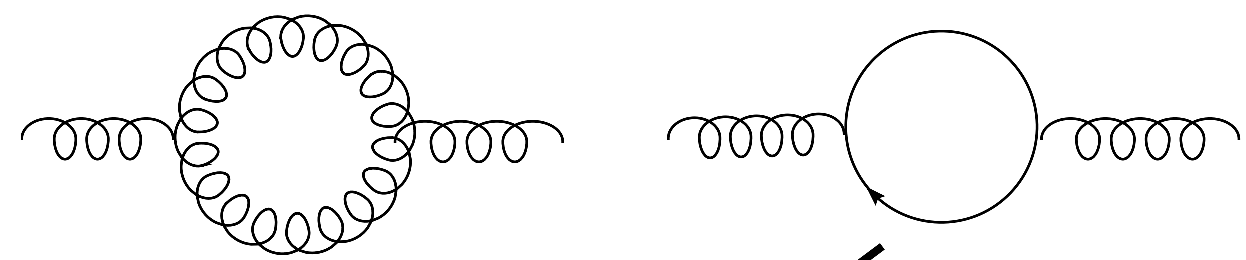
$$\beta(g) \approx \sum_n C_n g^n$$

走る結合定数と漸近的自由

結合定数$\alpha_s = \dfrac{g^2}{4\pi}$への量子効果



弱結合（漸近的自由性）



one-loopレベル

$$b_0 = \frac{11 - \frac{2}{3} n_f}{16\pi^2} > 0 \quad \text{for} \quad n_f < 16$$

$$\frac{dg}{d\ln\mu} = -b_0 g^3 \qquad \Rightarrow \frac{1}{2b_0} d\left(\frac{1}{g^2}\right) = d\ln\mu$$

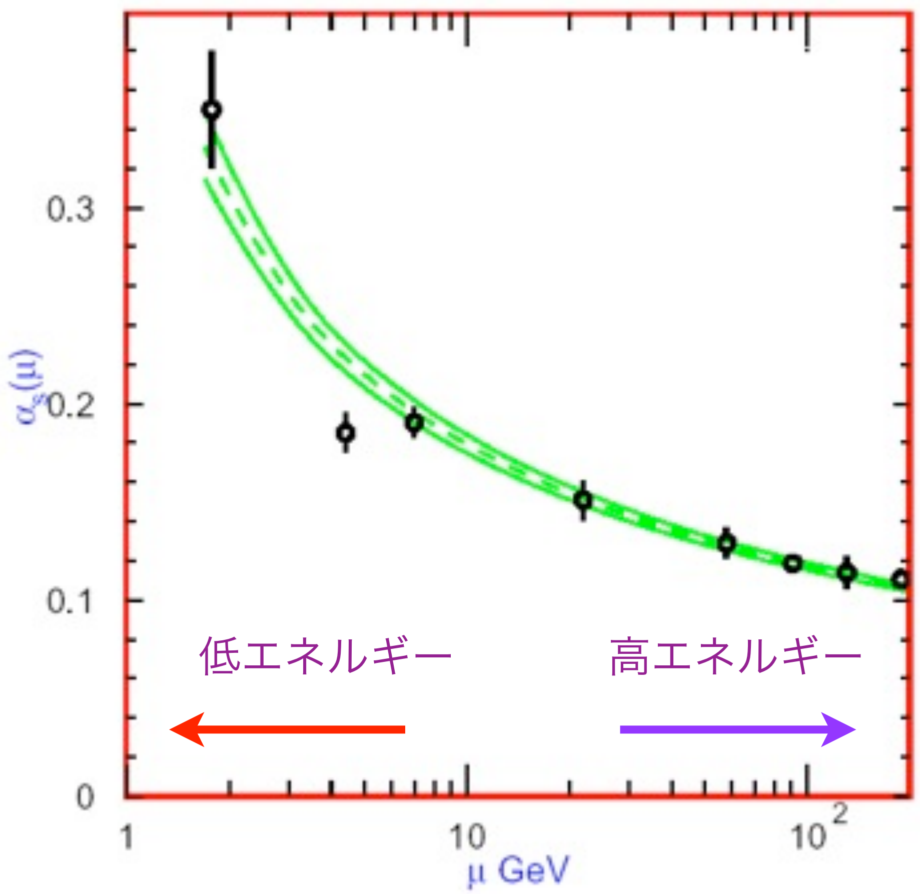
境界条件

$$\frac{1}{g^2} = 0 \quad \text{at} \quad \mu = \Lambda_0$$

$$g^2 = g^2(\Lambda) \quad \text{at} \quad \mu = Q$$

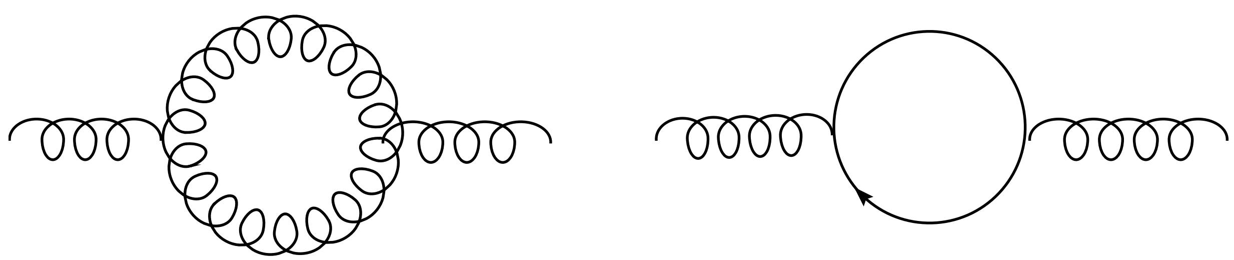
走る結合定数と漸近的自由

強結合（カラーの閉じ込め）



弱結合（漸近的自由性）

結合定数$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$への量子効果



one-loopレベル

$$b_0 = \frac{11 - \frac{2}{3}n_f}{16\pi^2} > 0 \quad \text{for} \quad n_f < 16$$

$$g^2(Q) = \frac{1}{b_0 \ln Q^2/\Lambda_0^2}$$

one-loopレベル

注： $g^2 = \infty \;\; \text{at}\; Q = \Lambda_0$

QCDの二面性

- 高エネルギー領域での漸近的自由性は摂動論的な取り扱いを保証し、QCDの摂動論と高エネルギー実験との整合性から強い相互作用の基礎理論としての地位を確定した。

- ハドロン・原子核物理とはまさに低エネルギー領域でのQCD物性であり、そこでは理論の強結合性からQCDの解析的取り扱いは難しい。

  → 「カラーの閉じ込め問題」

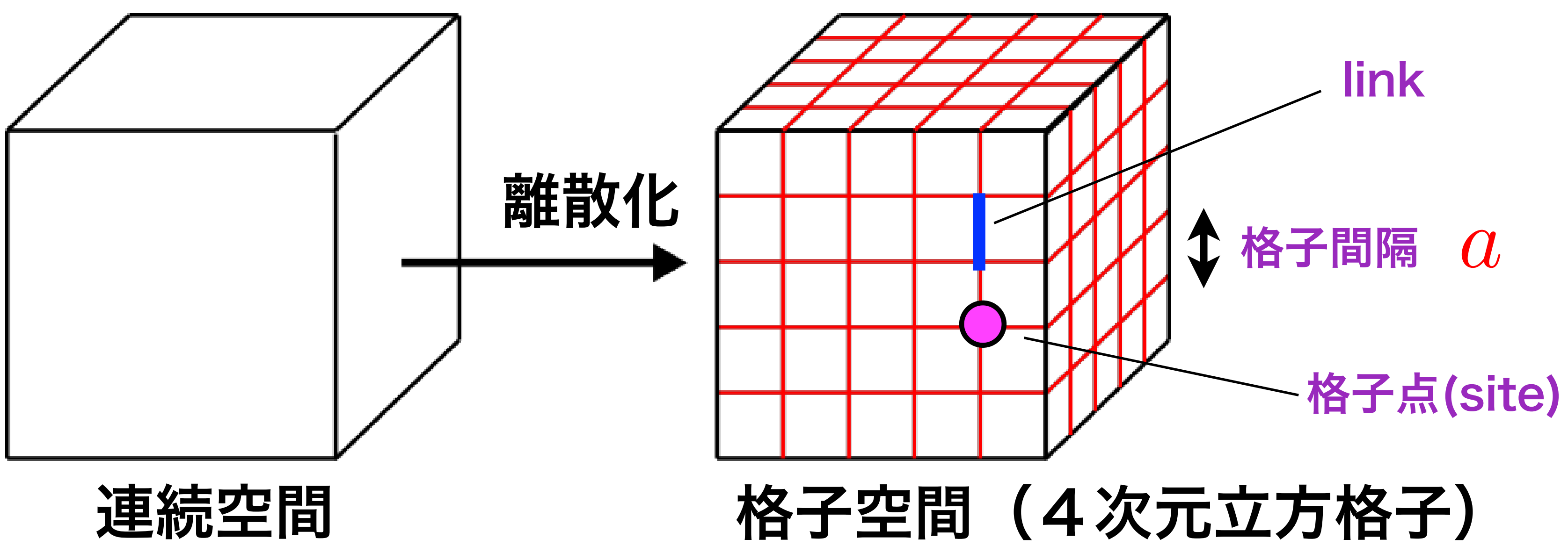
  → 　QCDの非摂動論的定式化＝格子QCD

格子場の理論の基礎

格子場の理論

４次元ユークリッド空間上の格子点上で経路積分を用いて場の理論を定義

- 格子間隔 a :紫外発散の有限化　$(-\pi/a < k_\mu \leq \pi/a)$
- 格子点(site)は４組の整数　$n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$
- 微分は差分に置き換え



スカラー場の格子化

$\lambda\,\phi^4$理論

$$S_{cont.} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) + \frac{\lambda}{4}\phi^4(x)\right]$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\phi(x)(\Box + m^2)\phi(x) + \frac{\lambda}{4}\phi^4(x)\right]$$

$$\Box = -\partial^2$$

格子化 $\phi(x) \longrightarrow \phi(n)$

$$\Delta_\mu\phi(x) = \frac{1}{a}\left(\phi(n+\hat{\mu}) - \phi(n)\right)$$ 前進差分

$$\Delta'_\mu\phi(x) = \frac{1}{a}\left(\phi(n) - \phi(n-\hat{\mu})\right)$$ 後進差分

$$\Delta^\dagger_\mu = -\Delta'_\mu$$

λφ⁴理論

$$S_{cont.} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) + \frac{\lambda}{4}\phi^4(x)\right]$$

$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\phi(x)(\Box + m^2)\phi(x) + \frac{\lambda}{4}\phi^4(x)\right]$$

$$\Box = -\partial^2$$

格子化

$$\Box\phi(x) \to -\Delta_\mu\Delta'_\mu\phi(n) \qquad \Delta^\dagger_\mu = -\Delta'_\mu$$

$$-\frac{1}{a^2}\left(\phi(n+\hat{\mu}) + \phi(n-\hat{\mu}) - 2\phi(n)\right)$$

$$S_{lat} = a^4\sum_n\left[-\frac{1}{2}\phi(n)\sum_\mu\frac{\phi(n+\hat{\mu}) + \phi(n-\hat{\mu}) - 2\phi(n)}{a^2} + \frac{1}{2}m^2\phi^2(n) + \lambda\phi^4(n)\right]$$

格子上のλφ⁴作用

$\lambda\,\phi^4$理論

格子上の$\lambda\,\phi^4$作用

$$S_{lat} = a^4 \sum_n \left[-\frac{1}{2}\phi(n) \sum_\mu \frac{\phi(n+\hat{\mu}) + \phi(n-\hat{\mu}) - 2\phi(n)}{a^2} + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(n) + \lambda \phi^4(n) \right]$$

スカラー場のフーリエ変換

$$\phi(n) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikn} \phi(k)$$

運動項と質量項

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \phi(-k) \left[\sum_\mu \frac{4}{a^2} \sin^2 \frac{a k_\mu}{2} + m^2 \right] \phi(k)$$

自由なスカラー場の伝搬関数の運動量表示

$$\left[\sum_\mu \frac{4}{a^2} \sin^2 \frac{a k_\mu}{2} + m^2 \right]^{-1}$$

スカラー場の伝搬関数

自由なスカラー場の伝搬関数の運動量表示

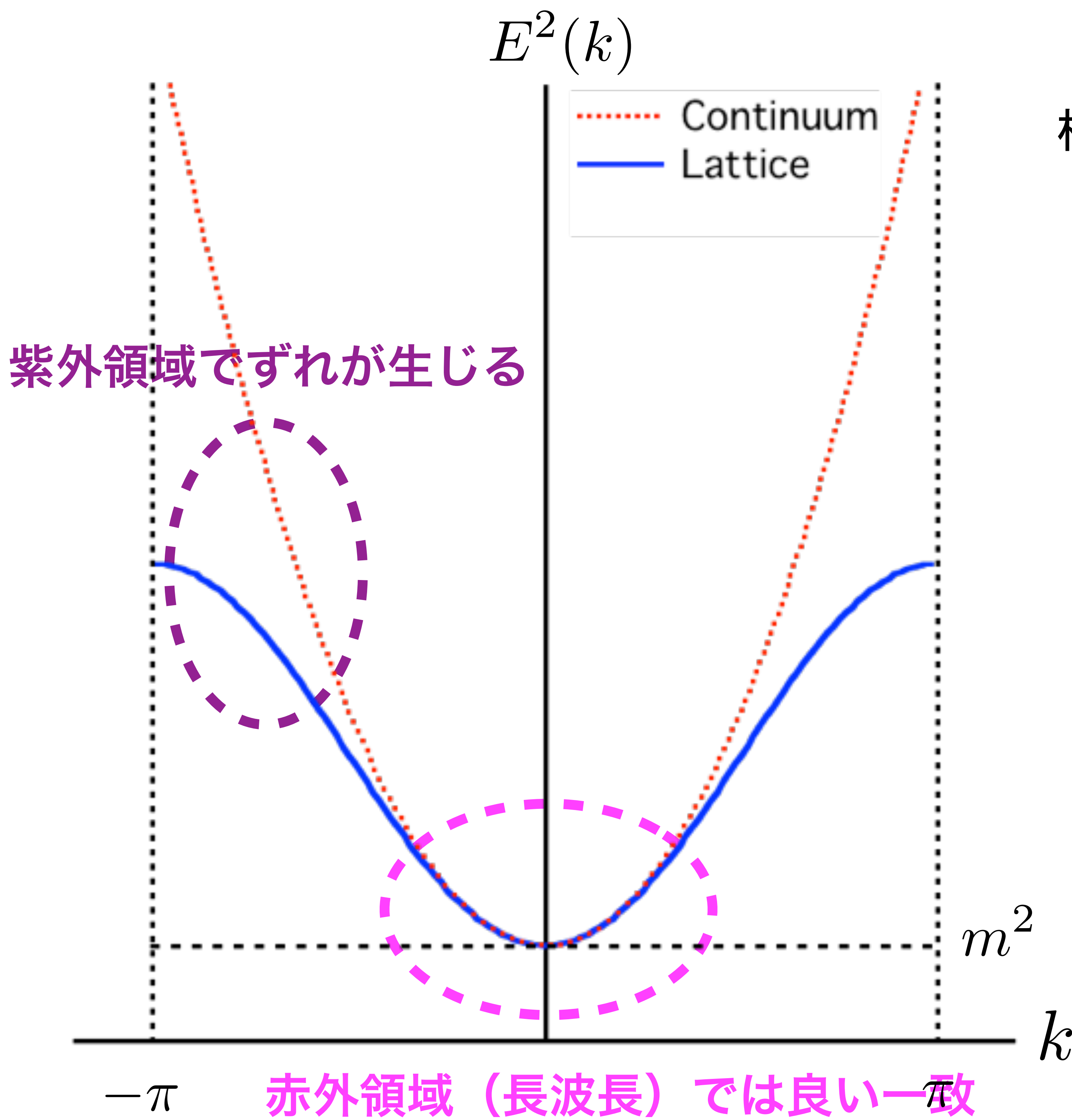
$$\left[\sum_\mu \frac{4}{a^2}\sin^2\frac{ak_\mu}{2}+m^2\right]^{-1}$$

伝搬関数の極条件から分散関係を得る

$$k_\mu = (iE(\vec{k}), \vec{k})$$

$$\frac{4}{a^2}\sinh^2\left[\frac{aE(\vec{k})}{2}\right] = m^2 + \frac{4}{a^2}\sum_{i=1}^{3}\sin^2\left[\frac{ak_i}{2}\right]$$

スカラー場の分散関係



格子間隔a=1としてd=2次元の分散関係は

$$E(k) = 2\sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{m^2}{4} + \sin^2(k/2)}\right)$$

$$\approx \sqrt{m^2 + 4\sin^2(k/2)}$$ **格子理論**

$$E_{\rm con}(k) = \sqrt{m^2 + k^2}$$ **連続理論**

フェルミオン場
の格子化

自由なフェルミオン

$$S_{con} = \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left(\gamma_\mu \partial_\mu + m\right) \Psi(x)$$

格子化 $\Psi(x) \longrightarrow \Psi(n)$

差分 $$\partial_\mu \Psi(x) \longrightarrow \frac{1}{2}\Big(\Delta_\mu \Psi(n) + \Delta'_\mu \Psi(n)\Big)$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\Psi(n+\hat{\mu}) - \Psi(n-\hat{\mu})\right)$$

$$S_{lat} = a^4 \sum_n \left\{ \sum_\mu \bar{\Psi}(n)\gamma_\mu \frac{\Psi(n+\hat{\mu}) - \Psi(n-\hat{\mu})}{2a} + m\bar{\Psi}(n)\Psi(n) \right\}$$

格子上の自由なフェルミオン作用

自由なフェルミオン

格子上の自由なフェルミオン作用

$$S_{lat} = a^4 \sum_n \left\{ \sum_\mu \bar{\Psi}(n)\gamma_\mu \frac{\Psi(n+\hat{\mu}) - \Psi(n-\hat{\mu})}{2a} + m\bar{\Psi}(n)\Psi(n) \right\}$$

フェルミオン場のフーリエ変換

$$\Psi(n) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikn} \Psi(k)$$

$$S_{lat} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(-k) \left[i \sum_\mu \gamma_\mu \frac{1}{a} \sin(ak_\mu) + m \right] \Psi(k)$$

フェルミオン場の伝搬関数

フェルミオン場の伝搬関数の運動量表示

$$G_F(k) = \left[i \sum_\mu \gamma_\mu \frac{1}{a} \sin(ak_\mu) + m \right]^{-1}$$

$$= \frac{-i\sum_\mu \gamma_\mu \frac{1}{a}\sin(ak_\mu) + m}{\frac{1}{a^2}\sum_\mu \sin^2(ak_\mu) + m^2}$$

伝搬関数の極条件から分散関係を得る

$$\frac{1}{a^2}\sinh^2[aE(\vec{k})] = m^2 + \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{3}\sin^2[ak_i]$$

格子フェルミオンの分散関係

$$\frac{1}{a^2}\sinh^2[aE(\vec{k})] = m^2 + \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{3}\sin^2[ak_i]$$

運動量 k を固定して、格子間隔 a→0 の極限を考えると

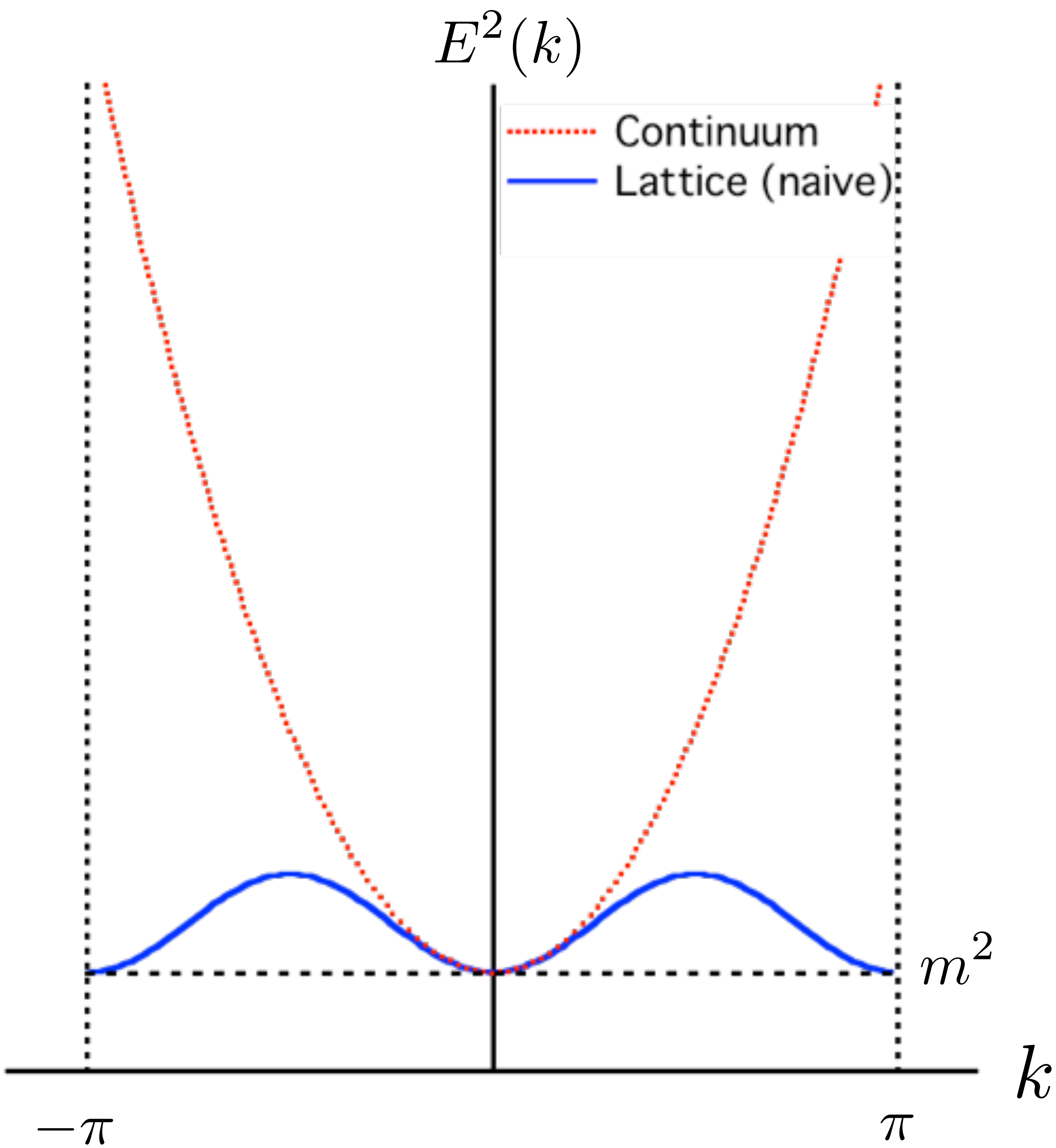
$$E^2(\vec{k}) = m^2 + \vec{k}^2$$

と通常の連続理論の分散関係を満たすフェルミオンの伝搬の他に

$$\lim_{a\to 0}\sin[ak_\mu] \to \begin{cases} a\tilde{k}_\mu & \text{at } k_\mu = \tilde{k}_\mu \\ -a\tilde{k}_\mu & \text{at } k_\mu = \pi/a + \tilde{k}_\mu \end{cases}$$

の性質から$k^2=-m^2$以外にも $k_\mu \to k_\mu + \pi/a$ でも極が現れる。

格子フェルミオンの分散関係



格子間隔a=1としてd=2次元の分散関係は

$$E(k) = \sinh^{-1}\left(\sqrt{m^2 + \sin^2(k)}\right)$$

$$\approx \sqrt{m^2 + \sin^2(k)}$$ **格子理論**

$$E_{\mathrm{con}}(k) = \sqrt{m^2 + k^2}$$ **連続理論**

種の倍増(species doubling)

格子上のフェルミオン場の伝搬関数

$$G_F(k) = \left[i \sum_\mu \gamma_\mu \frac{1}{a} \sin(ak_\mu) + m \right]^{-1}$$

連続極限(a→0)での対応する伝搬関数

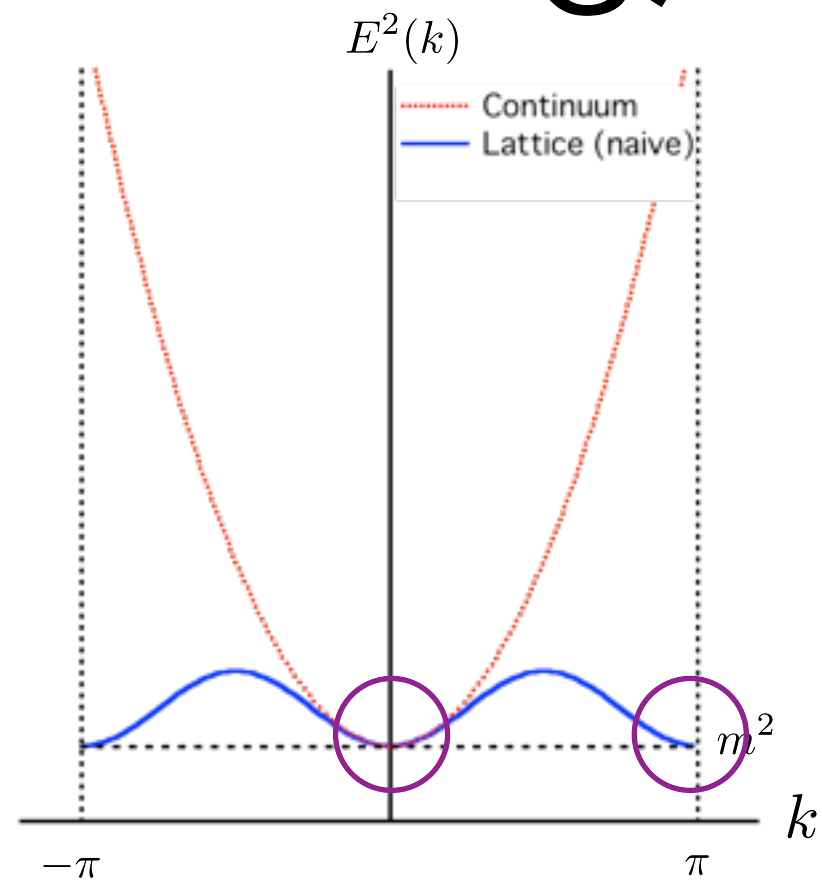
$p_\mu = 0$ に対して $\delta_\mu = 0$
$p_\mu = \pi/a$ に対して $\delta_\mu = 1$

$$\lim_{a \to 0} G_F(k) = \frac{1}{a} \sum_{p_\mu = 0, \pi/a} \frac{-i \sum_\mu (-1)^{\delta_\mu} \gamma_\mu \tilde{k}_\mu + m}{\tilde{k}_\mu^2 + m^2}$$

１個のフェルミオン粒子を表す目的で導入した格子上のフェルミオンの作用が、各運動量成分の方向に２個の物理的な粒子を運んでいることになっている。

４次元時空で合計2^4=16個のフェルミオン粒子が現れてしまった。

種の倍増(species doubling)



連続極限(a→0)での対応する伝搬関数

$$\lim_{a\to 0} G_F(k) = \frac{1}{a}\sum_{p_\mu=0,\pi/a} \frac{-i\sum_\mu (-1)^{\delta_\mu}\gamma_\mu \tilde{k}_\mu + m}{\tilde{k}_\mu^2 + m^2}$$

１個のフェルミオン粒子を表す目的で導入した格子上のフェルミオンの作用が、各運動量成分の方向に２個の物理的な粒子を運んでいることになっている。

４次元時空で合計2^4=16個のフェルミオン粒子が現れてしまった。

Wilsonフェルミオン

Wilsonフェルミオン

<u>種の倍増の問題の解決方法の１つ</u>

余分な１５個の極を消すために、格子上のフェルミオン作用に以下の項

$$-r \sum_n \sum_\mu \bar{\Psi}(n) \frac{\Psi(n+\hat{\mu}) + \Psi(n-\hat{\mu}) - 2\Psi(n)}{2a}$$

を付加する。これは連続極限では

$$\frac{ar}{2} \int d^4x \bar{\Psi}(x) \Box \Psi(x)$$

aのベキを一つ含むので、形式的にa→0で消えるので、この項を付加しても連続極限のフェルミオンの作用を変えない。

Wilsonフェルミオン

Wilsonフェルミオンの運動量空間での作用

$$S_{lat}^{W} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(-k) \left[i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \frac{1}{a} \sin(ak_{\mu}) + \frac{4r}{a} \sum_{\mu} \sin^2 \left[\frac{ak_{\mu}}{2} \right] + m \right] \Psi(k)$$

伝搬関数は

$$\left[i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \frac{1}{a} \sin(ak_{\mu}) + M(k) \right]^{-1}$$

前述の表式と形式的に同じだが、”質量項”が運動量に依存している。

$$M(k) \equiv m + \frac{r}{a} \sum_{\mu} (1 - \cos[ak_{\mu}])$$

Wilsonフェルミオン

運動量に依存した"質量項"

$$M(k) \equiv m + \frac{r}{a}\sum_{\mu}(1 - \cos[ak_{\mu}])$$

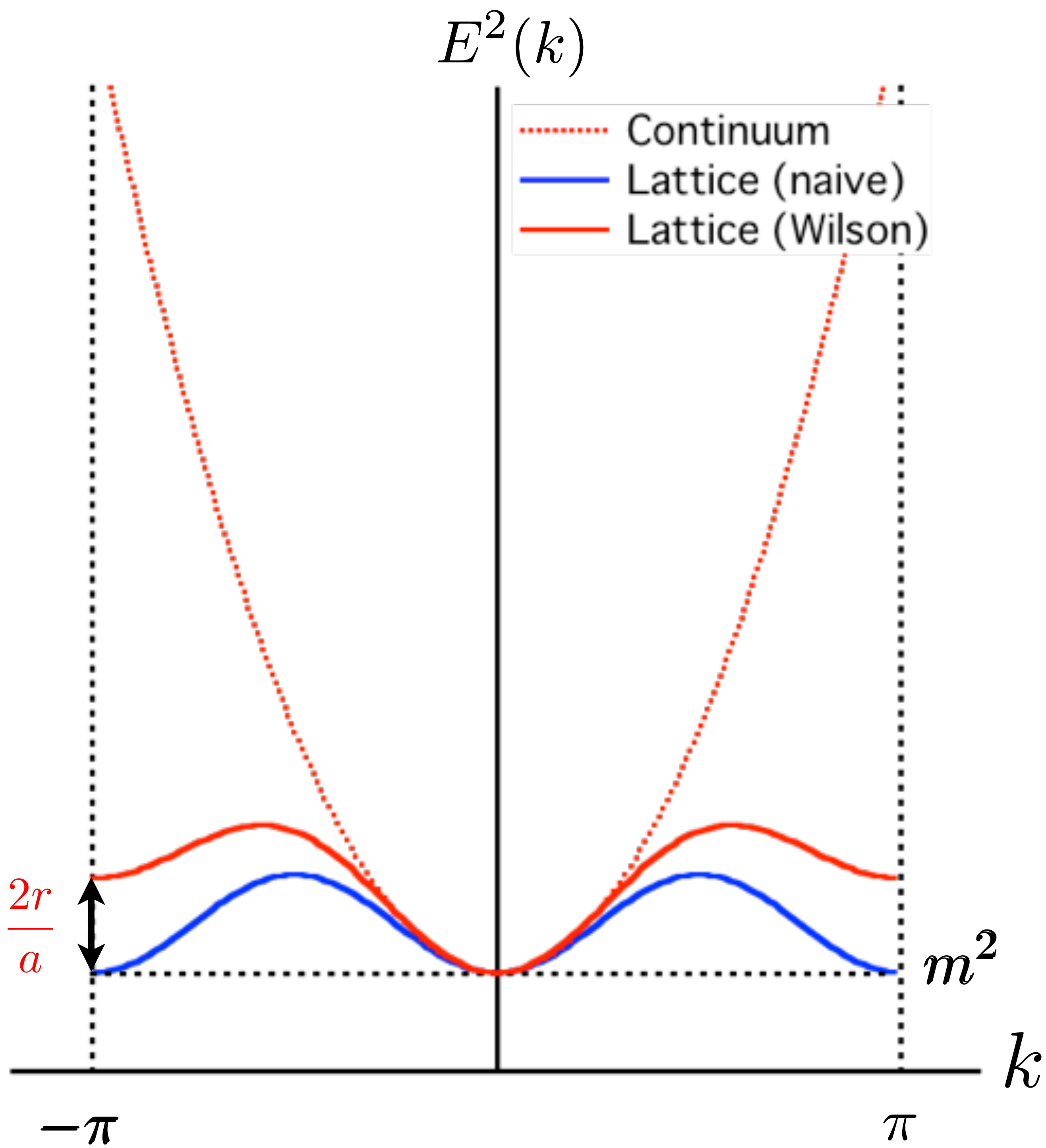
連続極限(a→0)では

$$\lim_{a \to 0} M(k) = m + \frac{2r}{a} n_{\pi} \qquad 0 \le n_{\pi} \le 4$$

n_{π}はk_{μ}における各成分のπ/aの個数の和：n_{π}＝０はπ/aを一個も含まないとき

連続極限ではダブラーの質量は無限大になり、
低エネルギーの物理から分離する

Wilsonフェルミオンの分散関係



格子間隔a=1としてd=2次元の分散関係は

$$E(k) = \sinh^{-1}\left(\sqrt{m^2 + \sin^2(k)}\right)$$

$$\approx \sqrt{m^2 + \sin^2(k)}$$ **格子理論**

$$m \to M(k) = m + r[1 - \cos(k)]$$

$$E_{\text{con}}(k) = \sqrt{m^2 + k^2}$$ **連続理論**

カイラルフェルミオン

Ginsberg–Wilson 関係式

カイラル対称性: $\{D, \gamma_5\} = 0$

Wilson フェルミオン: $D_W = \gamma_\mu \nabla_\mu + m - \frac{a}{2}\Delta$

$\{D_W, \gamma_5\} = a\gamma_5\Delta \neq 0$

$\{D, \gamma_5\} = aD\gamma_5 D$ Ginsberg–Wilson 関係式

$\to D^{-1}\gamma_5 + \gamma_5 D^{-1} = a\gamma_5$

伝搬関数に対してカイラル対称性の破れはO(a)で局所的

この場合、格子上での“カイラル”対称性が厳密に定義できる。

Ginsberg–Wilson 関係式

フェルミオン作用　$S = \bar{\psi} D \psi$

連続理論のカイラル変換

格子上の“カイラル”変換

$$\delta\psi = \gamma_5 \left(1 - \frac{a}{2} D\right) \psi \qquad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi} \left(1 - \frac{a}{2} D\right) \gamma_5$$

$$\xrightarrow{a \to 0}$$

$$\delta\psi = \gamma_5 \psi \qquad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi} \gamma_5$$

$$\delta S = \bar{\psi} \left(D\gamma_5 + \gamma_5 D - aD\gamma_5 D\right) \psi = 0$$

作用は変換に対して不変

$$\{D, \gamma_5\} = aD\gamma_5 D$$

Ginsberg–Wilson 関係式

$$D^{-1}\gamma_5 + \gamma_5 D^{-1} = a\gamma_5$$

伝搬関数に対してカイラル対称性の破れはO(a)で局所的

この場合、格子上での“カイラル”対称性が厳密に定義できる。

Ginsberg–Wilson フェルミオン

$$\{D, \gamma_5\} = aD\gamma_5 D$$

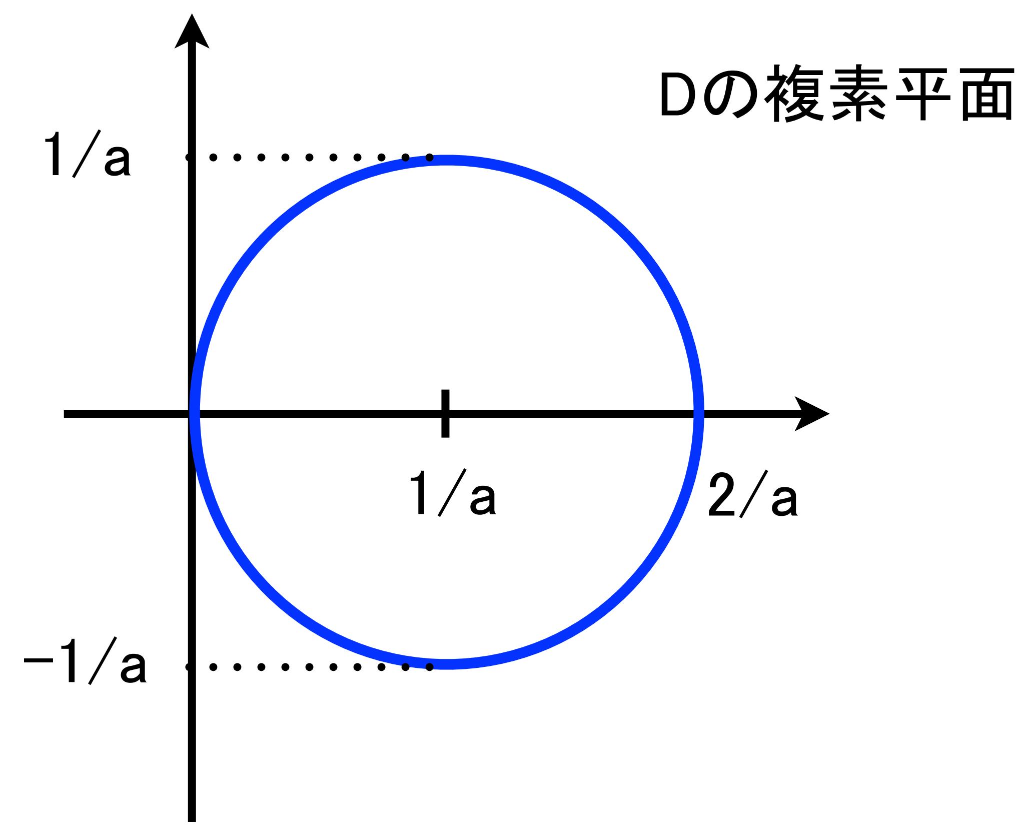
Ginsberg–Wilson 関係式

γ_5–hermiticity $\quad D^\dagger = \gamma_5 D \gamma_5$

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = a\gamma_5 D^\dagger D$$

$$D^\dagger + D = aD^\dagger D \quad (*)$$

特徴的な固有値分布を持つ



<u>証明</u>

$$A = aD - 1$$ とおく

（＊）式に代入して

$$\frac{1}{a}\left(A^\dagger + A + 2\right) = a\frac{1}{a}\left(A^\dagger + 1\right)\frac{1}{a}\left(A + 1\right)$$

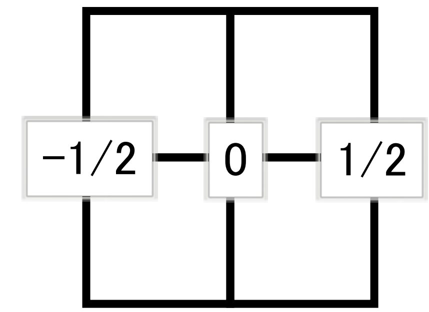
$\leftrightarrow A^\dagger A = 1$ Aの固有値は単位円

離散化誤差と分散関係

差分(∇$_\mu$とΔ)

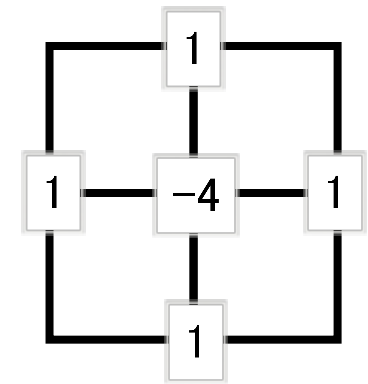
2-dim

$$\nabla_\mu^{\mathrm{std}}\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\psi(x+\mu) - \psi(x-\mu)\right)$$

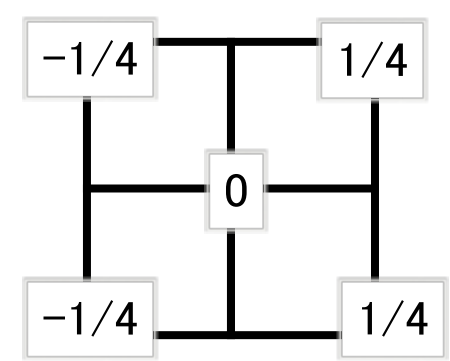


ラプラシアン

$$\Delta^{\mathrm{std}}\psi(x) = \sum_\mu \left(\psi(x+\mu) + \psi(x-\mu) - 2\psi(x)\right)$$

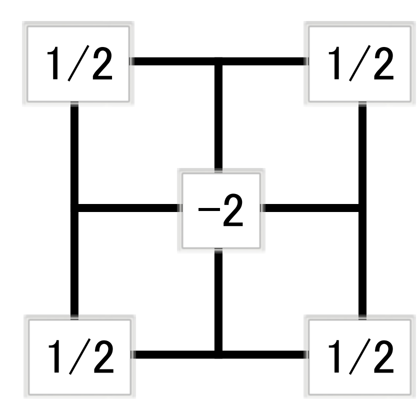


$$\nabla_\mu^{\mathrm{til}}\psi(x) = \frac{1}{4}\left(\psi(x+\mu+\nu) - \psi(x-\mu+\nu)\right.$$
$$\left. +\psi(x+\mu-\nu) - \psi(x-\mu-\nu)\right)$$



ラプラシアン

$$\Delta^{\mathrm{til}}\psi(x) = \frac{1}{2}\sum_{\mu>\nu}\left(\psi(x+\mu+\nu) + \psi(x-\mu+\nu)\right.$$
$$\left. +\psi(x+\mu-\nu) + \psi(x-\mu-\nu) - 4\psi(x)\right)$$



差分（∇_μとΔ）

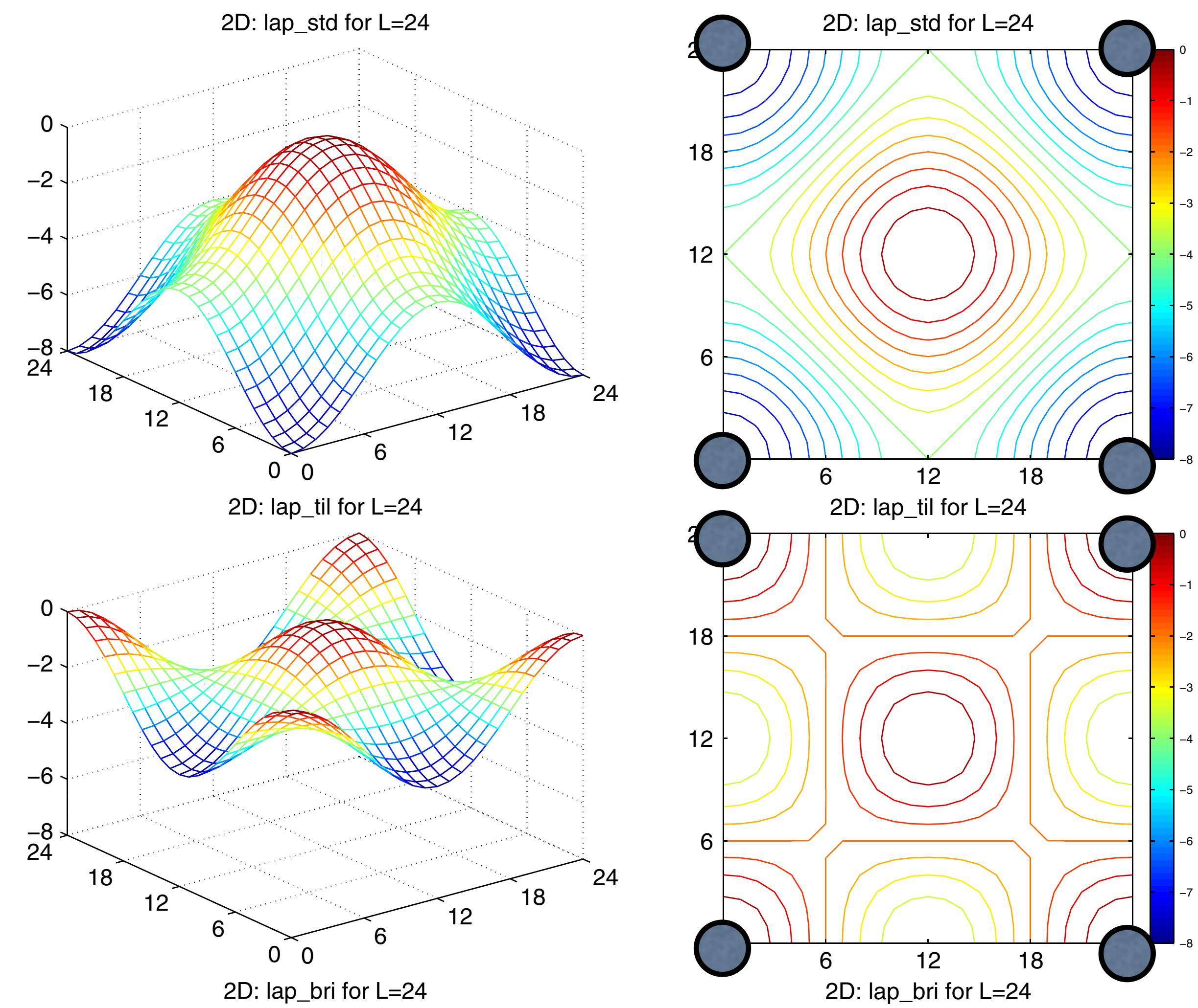
$$\Delta(\alpha) = \alpha\Delta^{\mathrm{std}} + (1-\alpha)\Delta^{\mathrm{til}}$$

1）Brillouin–type

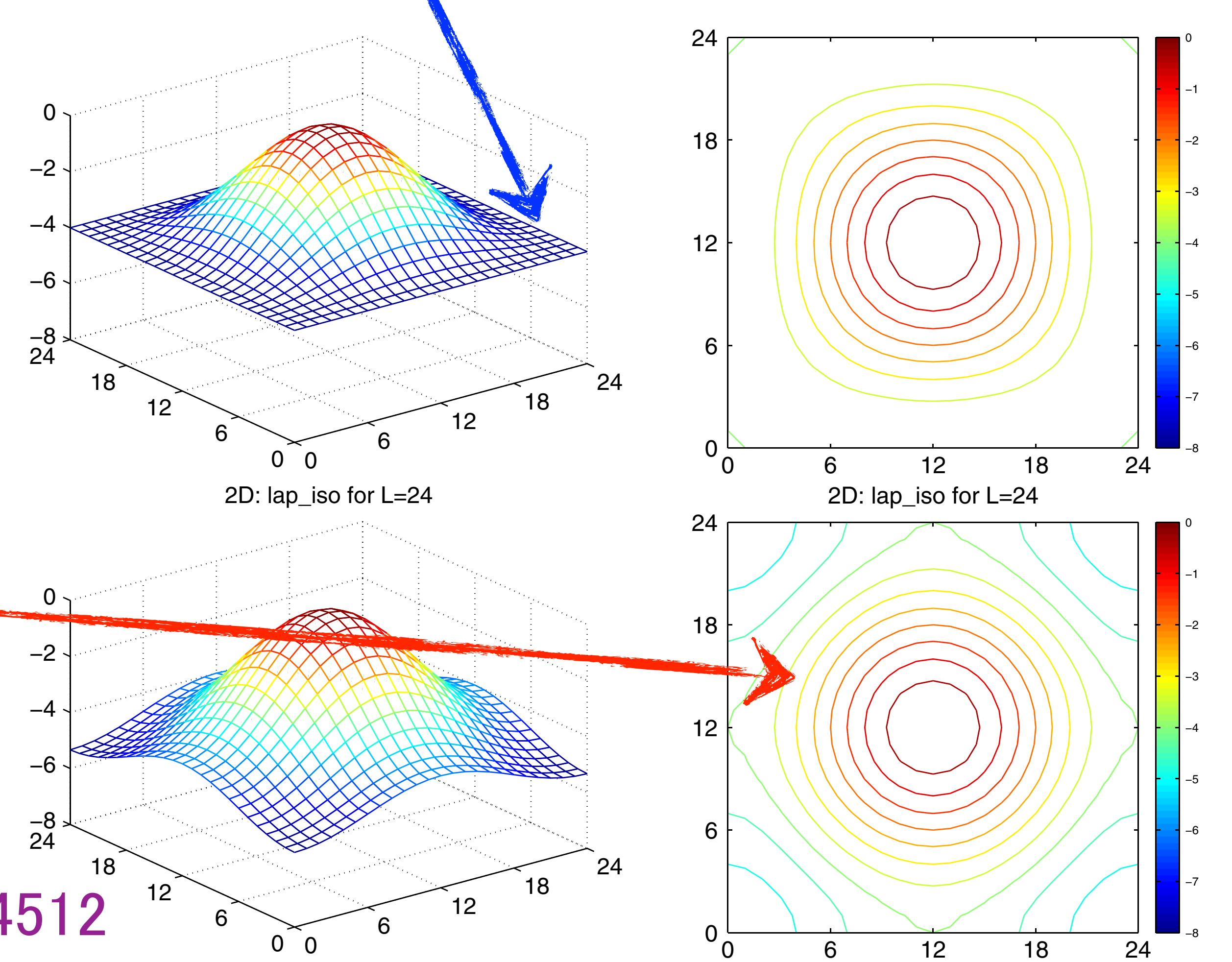
$$\alpha = 1/2 : \Delta^{\mathrm{bri}} \equiv \frac{1}{2}\Delta^{\mathrm{std}} + \frac{1}{2}\Delta^{\mathrm{til}}$$

2）Isotropic–type

$$\alpha = 2/3 : \Delta^{\mathrm{iso}} \equiv \frac{2}{3}\Delta^{\mathrm{std}} + \frac{1}{3}\Delta^{\mathrm{til}}$$



Brillouin zoneの境界で一定値

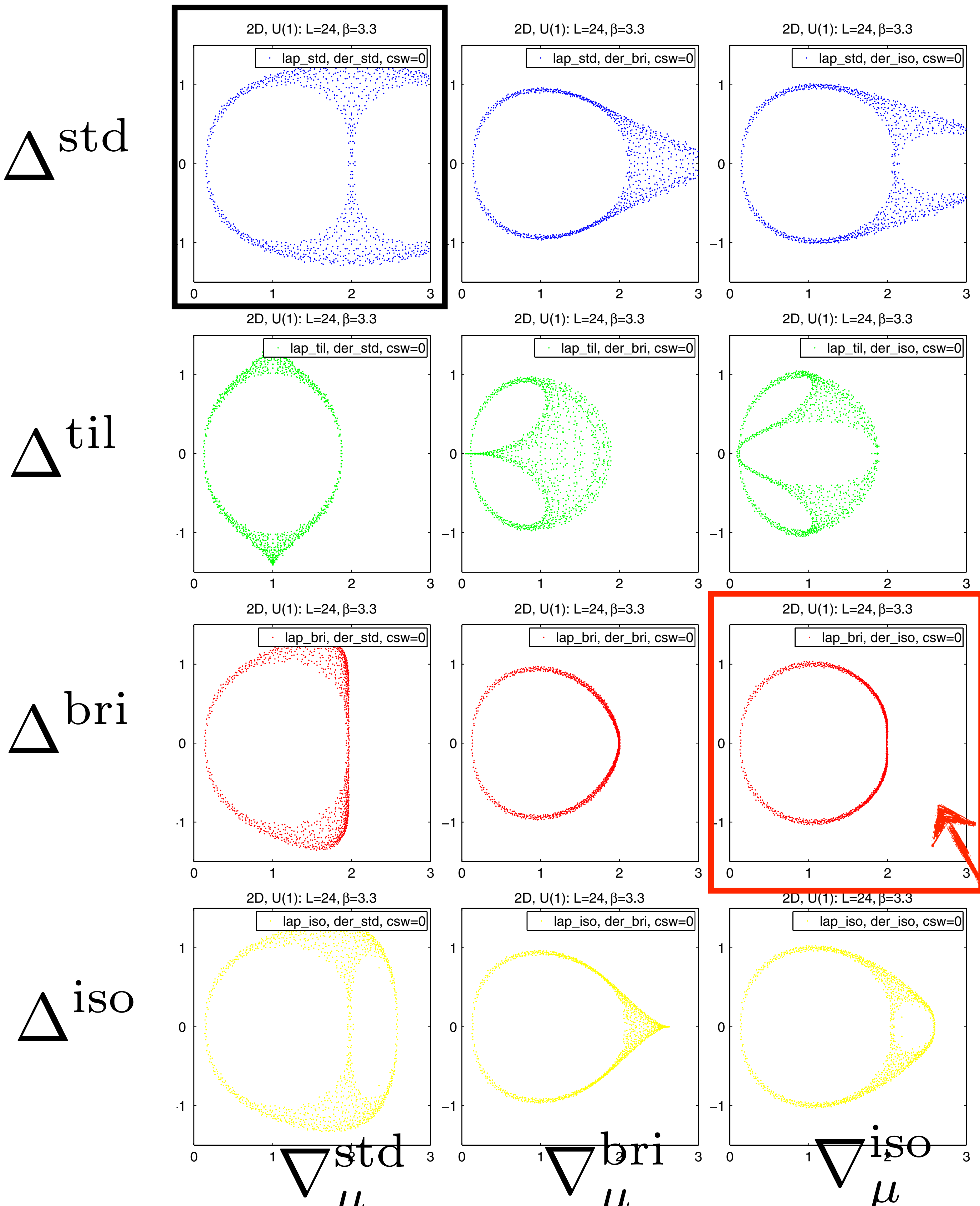


中心付近ではisotropic

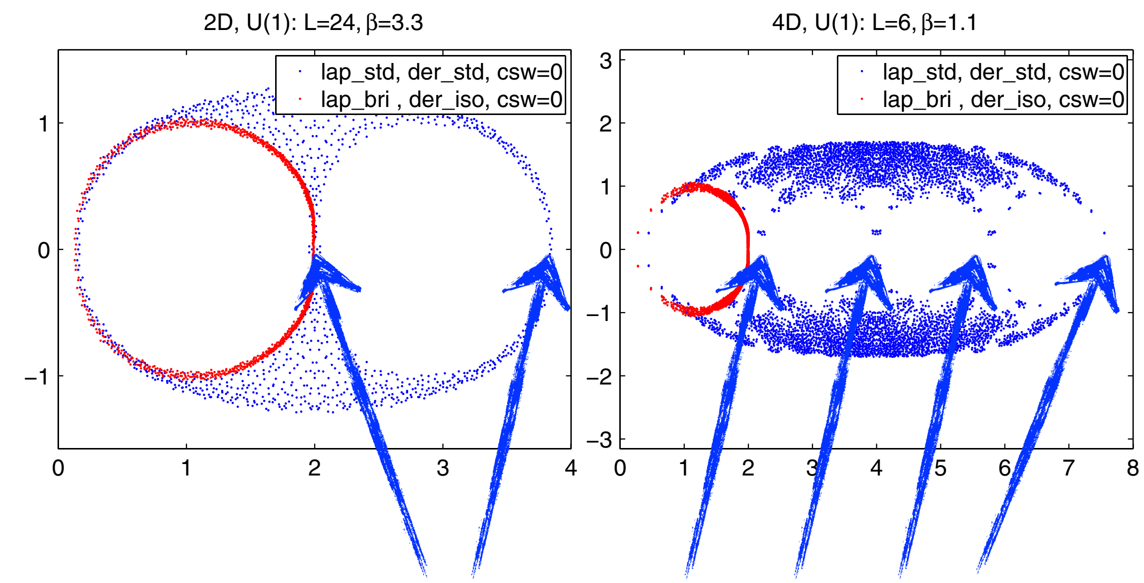
S. Dürr and G. Koutsou, Phys.Rev.D83 (2011) 114512

固有値分布

S. Dürr and G. Koutsou, Phys.Rev.D83 (2011) 114512



2−dim　4−dim



Wilson termによって重くなったダブラー

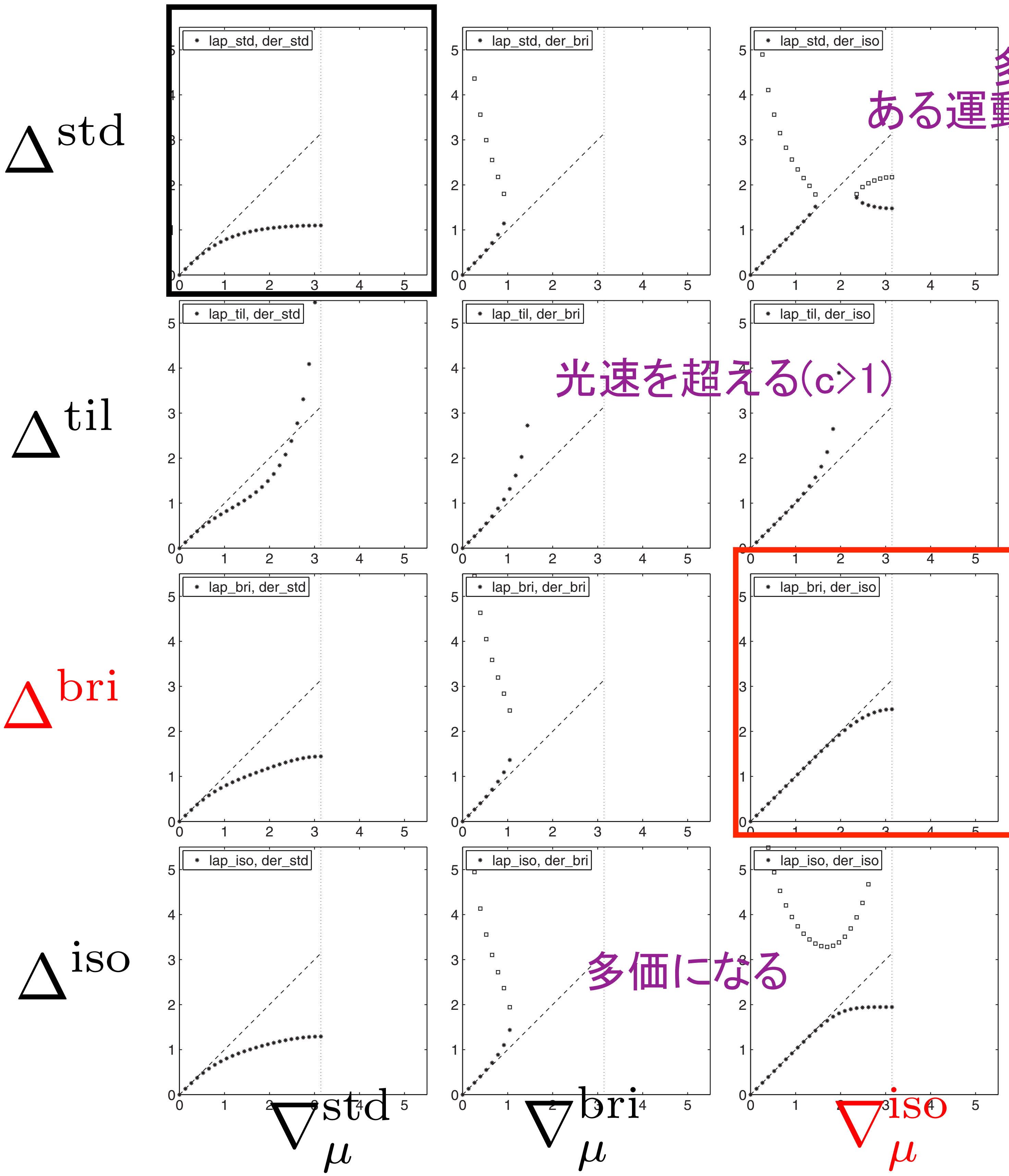
	2−dim		4−dim			
ダブラーの質量	2	4	2	4	6	8
ダブラーの個数	2	1	4	6	4	1

Ginsburg−Wilson typeの固有値分布
になっている

分散関係

S. Dürr and G. Koutsou, Phys.Rev.D83 (2011) 114512

2-dim



最も望ましい分散関係
（連続理論に近い）を
与えている

ゲージ場の格子化

フェルミオンの運動項の格子化

$$S_{con} = \int d^4x \bar{\Psi}(x) \left(\gamma_\mu \partial_\mu + m\right) \Psi(x)$$

格子化 $\Psi(x) \longrightarrow \Psi(n)$

差分 $$\partial_\mu \Psi(x) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(\underbrace{\Delta_\mu \Psi(n)}_{\text{前進差分}} + \underbrace{\Delta'_\mu \Psi(n)}_{\text{後進差分}}\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\Psi(n+\hat{\mu}) - \Psi(n-\hat{\mu})\right)$$

中央差分⇒エルミート性の保持

$$S_{lat} = a^4 \sum_n \left\{ \sum_\mu \bar{\Psi}(n)\gamma_\mu \frac{\Psi(n+\hat{\mu}) - \Psi(n-\hat{\mu})}{2a} + m\bar{\Psi}(n)\Psi(n) \right\}$$

格子上の自由なフェルミオン作用

ゲージ場の格子化　–リンク変数の導入–

$\bar{\Psi}(n)\partial_\mu\Psi(n)$　の差分化に伴う非局所項　$\bar{\Psi}(n)\Psi(n\pm\hat{\mu})$は

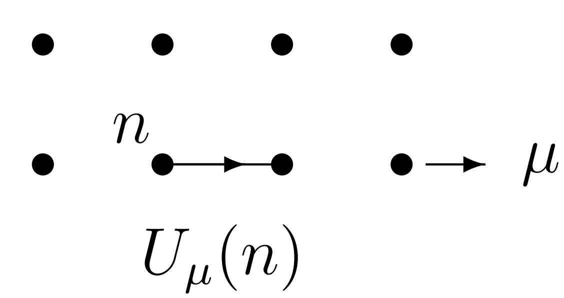
ゲージ変換　$\Psi(n)\rightarrow V(n)\Psi(n)$に対して不変でない。

連続理論においても非局所的な　$\bar{\Psi}(x)\Psi(y)$　に対してゲージ不変性を保つために、ゲージ変換に対して、$U(x,y)\rightarrow V(x)U(x,y)V^\dagger(y)$　と変換する関数を$\bar{\Psi}(x)U(x,y)\Psi(y)$のように挟んでゲージ不変な非局所演算子を作る。

このとき$U(x,y)$はU(1)理論においてはなじみがあり、

$$U(x,y)=e^{ig\int_y^x A_\mu(z)dz_\mu}\rightarrow Pe^{ig\int_y^x A_\mu^a(z)T^a dz_\mu}$$

格子理論の運動項においても同様なゲージ不変な取り扱いが考えられる。　　リンク変数　$U_\mu(n)\equiv e^{iagA_\mu(n)}$



$\bar{\Psi}(x)U(x,y)\Psi(y)$　　$\bar{\Psi}(n)U_\mu(n)\Psi(n+\hat{\mu})$

フェルミオンとゲージ場の相互作用

差分化したフェルミオンの運動項中の非局所項を

$$\bar{\Psi}(n)\Psi(n+\hat{\mu}) \to \bar{\Psi}(n)U_\mu(n)\Psi(n+\hat{\mu})$$

のように変更すると、Wilsonフェルミオンは

$$S_F = -a^3\frac{1}{2}\sum_n\sum_\mu \bar{\Psi}(n)\left[(r-\gamma_\mu)U_\mu(n)\Psi(n+\hat{\nu}) + (r+\gamma_\mu)U_\mu^\dagger(n-\hat{\mu})\Psi(n-\hat{\mu})\right]$$

$$+(am+4r)a^3\sum_n \bar{\Psi}(n)\Psi(n)$$

で与えられる。

フェルミオンとゲージ場の相互作用

ここで、 $\kappa = \dfrac{1}{2(am+4r)}$ という量を定義して、

クォーク場を

$$\Psi \to \Psi' = \sqrt{\frac{a^3}{2\kappa}}\Psi$$

のように再定義すると、Wilsonフェルミオンは

$$S_F = \bar{\Psi}'(n) \textcolor{red}{D_W(n,m)} \Psi'(m)$$

$$D_W(n,m) = \delta_{n,m} - \kappa \sum_{\mu} \left[(r-\gamma_\mu) U_\mu(n) \delta_{m,n+\hat{\mu}} + (r+\gamma_\mu) U_\mu^\dagger(n-\hat{\mu}) \delta_{m,n-\hat{\mu}} \right]$$

のように書き直せる。

ゲージ場の運動項 –プラケット変数の導入–

格子上でゲージ場の運動項はどのようになるべきか？

作用決定の指導原理として

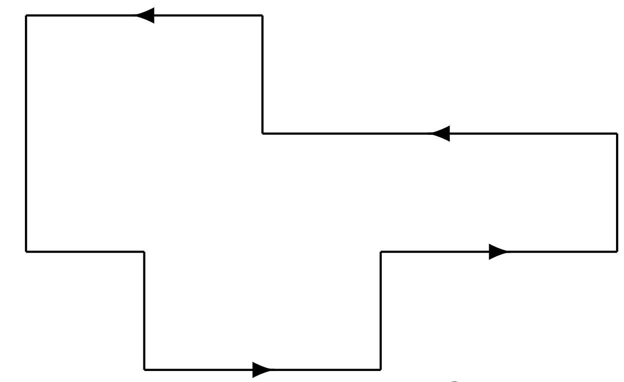
- ゲージ不変
- a → ０で連続理論に帰着
- ゲージ対称性以外の連続理論の持つべき対称性を最大限共有

※格子上の定義には任意性がある

リンク変数によるゲージ不変量は任意のループCに沿ってリンク変数の積をとって、そのトレースをとればよい

ゲージ場の運動項 –プラケット変数の導入–

リンク変数によるゲージ不変量は任意のループCに沿ってリンク変数の積をとって、そのトレースをとればよい。

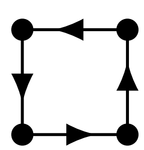


$\mathcal{C}$

リンク変数のゲージ変換

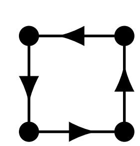
$$U_\mu(n) \to V(n)U_\mu(n)V^\dagger(n+\hat{\mu})$$

閉じたループとして一番簡単なものは、最小の正方形で



$$n \quad = U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})U^\dagger(n)$$

作用を構成するゲージ不変な要素としてプラケット変数を定義する



$$P_{\mu\nu}(n) = \frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}\left[\quad\right]$$

ゲージ場の運動項 –連続理論との整合性–

ゲージ不変なプラケット変数で格子上のゲージ作用を記述する

$$S_{lat} = -\frac{2N_c}{g^2}\sum_{n}\sum_{\mu>\nu} P_{\mu\nu}(n) \qquad \text{with} \quad P_{\mu\nu}(n) = \frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}\left[\ \square\ \right]$$

一見すると連続理論のゲージ作用と似て非なるものの様であるが、a→０の連続極限を考えると

$$\mathrm{Tr}\{\ \square\ \} = N_C - \frac{g^2}{2}\Big\{a^4\mathrm{Tr}\{F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\} + \frac{a^6}{12}\mathrm{Tr}\{F_{\mu\nu}(D_\mu^2 + D_\nu^2)F_{\mu\nu}\} + \mathcal{O}(a^8)\Big\} + \mathcal{O}(g^4a^6)$$

$$S_{lat} = S_{con} + \underbrace{a^2S_2 + a^4S_4 + \cdots}_{\text{lattice artifact}}$$

格子作用の改良

改良されたゲージ作用

作用決定の指導原理として

- ゲージ不変
- a → 0 で連続理論に帰着
- ゲージ対称性以外の連続理論の持つべき対称性を最大限共有

➡ 格子上での作用は一意的には決まらない。

改良されたゲージ作用

作用決定の指導原理として

- ゲージ不変
- a → 0 で連続理論に帰着
- ゲージ対称性以外の連続理論の持つべき対称性を最大限共有

➡ 格子上での作用は一意的には決まらない

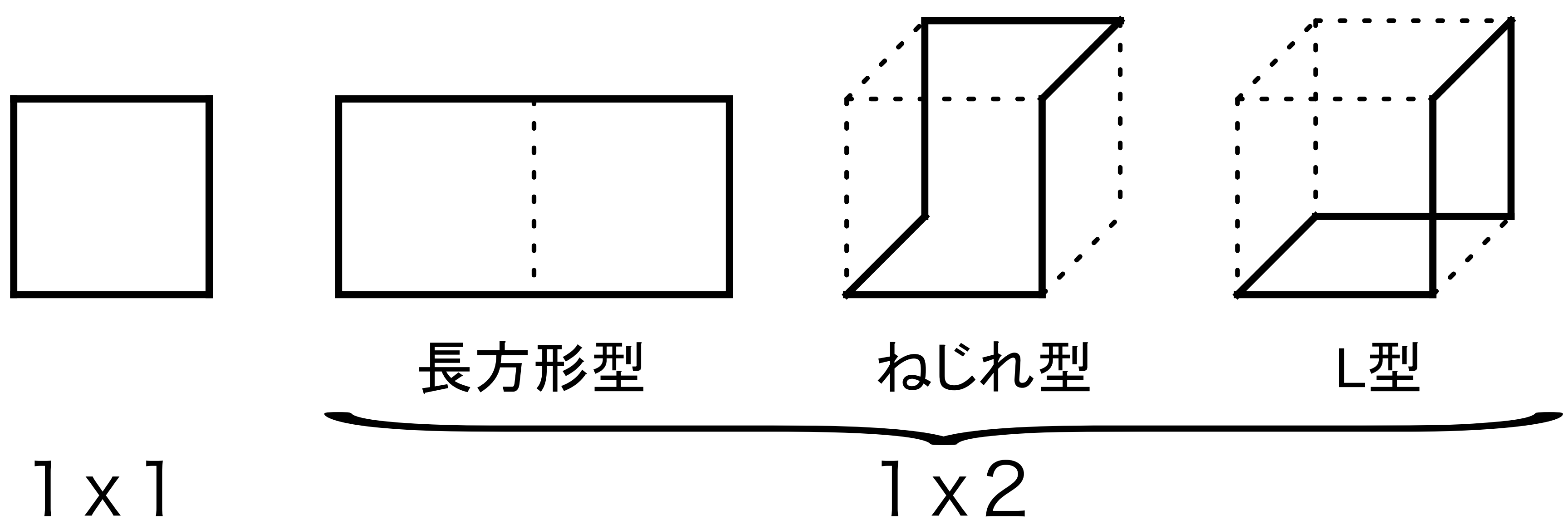
$$S_{lat} = S_{con} + \underbrace{a^2 S_2 + a^4 S_4 + \cdots}_{\text{lattice artifact}}$$

➡ プラケット作用はO(a²)の誤差を持つ

改良されたゲージ作用

- プラケット作用は１x１のWilsonループ
- １x２のWilsonループまで含めた一般的な作用は

$$S_G^{\mathrm{Imp}} = \beta \sum_n \left[c_0(g^2)\mathcal{L}_{1\times 1}(n) + \sum_{i=1}^{3} c_i(g^2)\mathcal{L}^i_{1\times 2}(n) \right]$$



改良されたゲージ作用

- プラケット作用は１x１のWilsonループ
- １x２のWilsonループまで含めた一般的な作用は

$$S_G^{\mathrm{Imp}} = \beta \sum_n \left[c_0(g^2)\mathcal{L}_{1\times1}(n) + \sum_{i=1}^{3} c_i(g^2)\mathcal{L}^i_{1\times2}(n) \right]$$

➡ Lüscher-Weisz (1985)により、O(a²)の誤差を取り除くための係数 c_i が計算された

ただし、係数は摂動論のall orderで次の**規格化条件**を満たす

$$c_0(g^2) + 8c_1(g^2) + 8c_2(g^2) + 16c_3(g^2) = 1$$

改良されたゲージ作用

- プラケット作用は１x１のWilsonループ
- １x２のWilsonループまで含めた一般的な作用は

$$S_G^{\mathrm{Imp}} = \beta \sum_n \left[c_0(g^2)\mathcal{L}_{1\times 1}(n) + \sum_{i=1}^{3} c_i(g^2)\mathcal{L}^i_{1\times 2}(n) \right]$$

➡ Lüscher-Weisz (1985)により、O(a²)の誤差を取り除くための係数 c_i が計算された

ツリーレベル(g=0)：
$$\boxed{c_0 = \frac{5}{3},\ c_1 = -\frac{1}{12},}\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$$

改良されたゲージ作用

- プラケット作用は１x１のWilsonループ
- １x２のWilsonループまで含めた一般的な作用は

$$S_G^{\mathrm{Imp}} = \beta \sum_n \left[c_0(g^2)\mathcal{L}_{1\times 1}(n) + \sum_{i=1}^{3} c_i(g^2)\mathcal{L}^i_{1\times 2}(n) \right]$$

➡ Lüscher-Weisz (1985)により、O(a²)の誤差を取り除くための係数 c_i が計算された

ツリーレベル(g=0)：　$c_0 = \frac{5}{3},\ c_1 = -\frac{1}{12},\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$

1-ループの摂動論(g<<1)：

$$c_0 = \frac{5}{3} + 0.2370g^2,\ c_1 = -\frac{1}{12} - 0.02521g^2,\ c_2 = -0.00441g^2,\ c_3 = 0$$

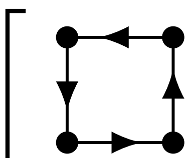
改良されたゲージ作用

- 最終的に１x２のWilsonループまで含めた作用として

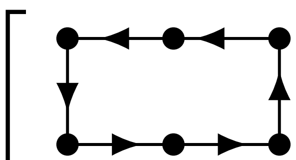
$$S_G^{\mathrm{Imp}} = -\beta \sum_n \sum_{\mu<\nu} \{(1-8c_1)P_{\mu\nu}(n) + c_1 \left(R_{\mu\nu}(n) + R_{\nu\mu}(n)\right)\}$$

方法	作用の名前	c_1
ツリー	N/A	−1/12
摂動論的 繰り込み群	Iwasaki作用	−0.331
非摂動論的 繰り込み群	DBW2作用	−1.40686

$$P_{\mu\nu}(n) = \frac{1}{N_c}\mathrm{ReTr}\left[\quad \right]$$



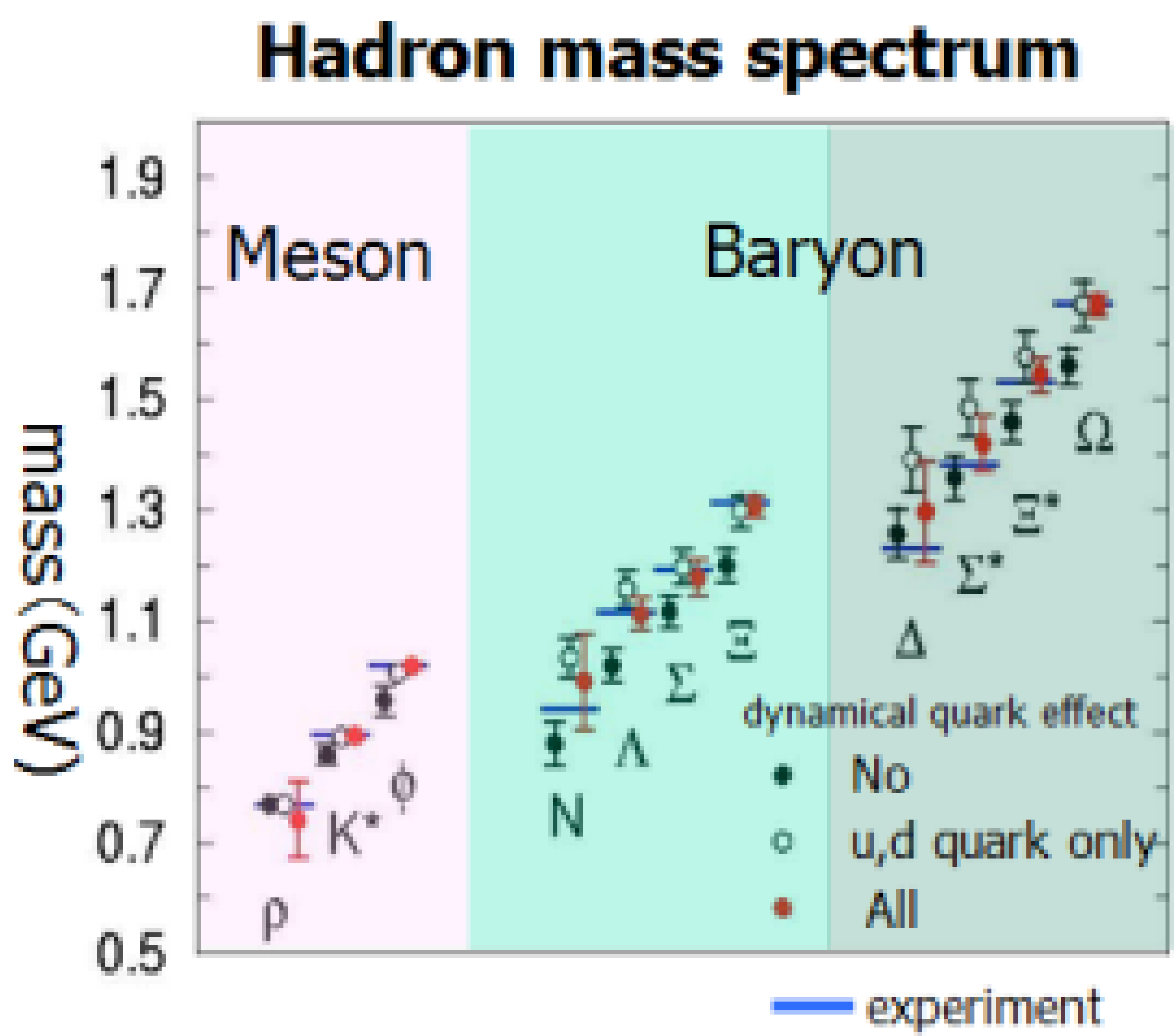
$$R_{\mu\nu}(n) = \frac{1}{N_c}\mathrm{ReTr}\left[\quad \right]$$



格子QCDにおけるパラメータ

- クォーク質量($m_u=m_d$, m_s)と格子間隔 a

INPUT: π, K中間子の質量とΩバリオンの質量



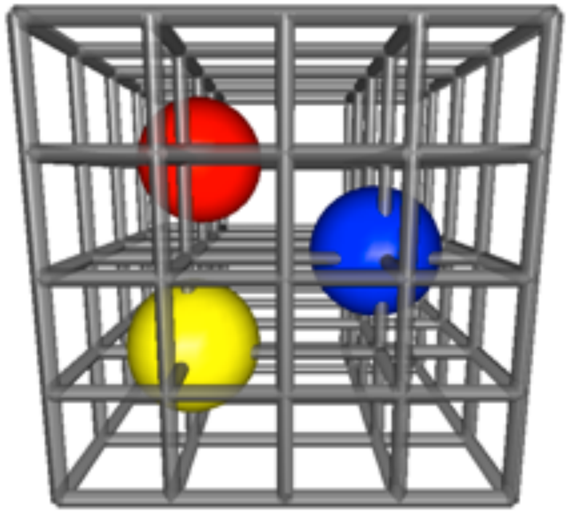
- u,d,s (2+1 flavor)
- u,d (2 flavor)
- quench approx.

CP-PACS collaboration

格子QCDにおける系統誤差

４つの起源

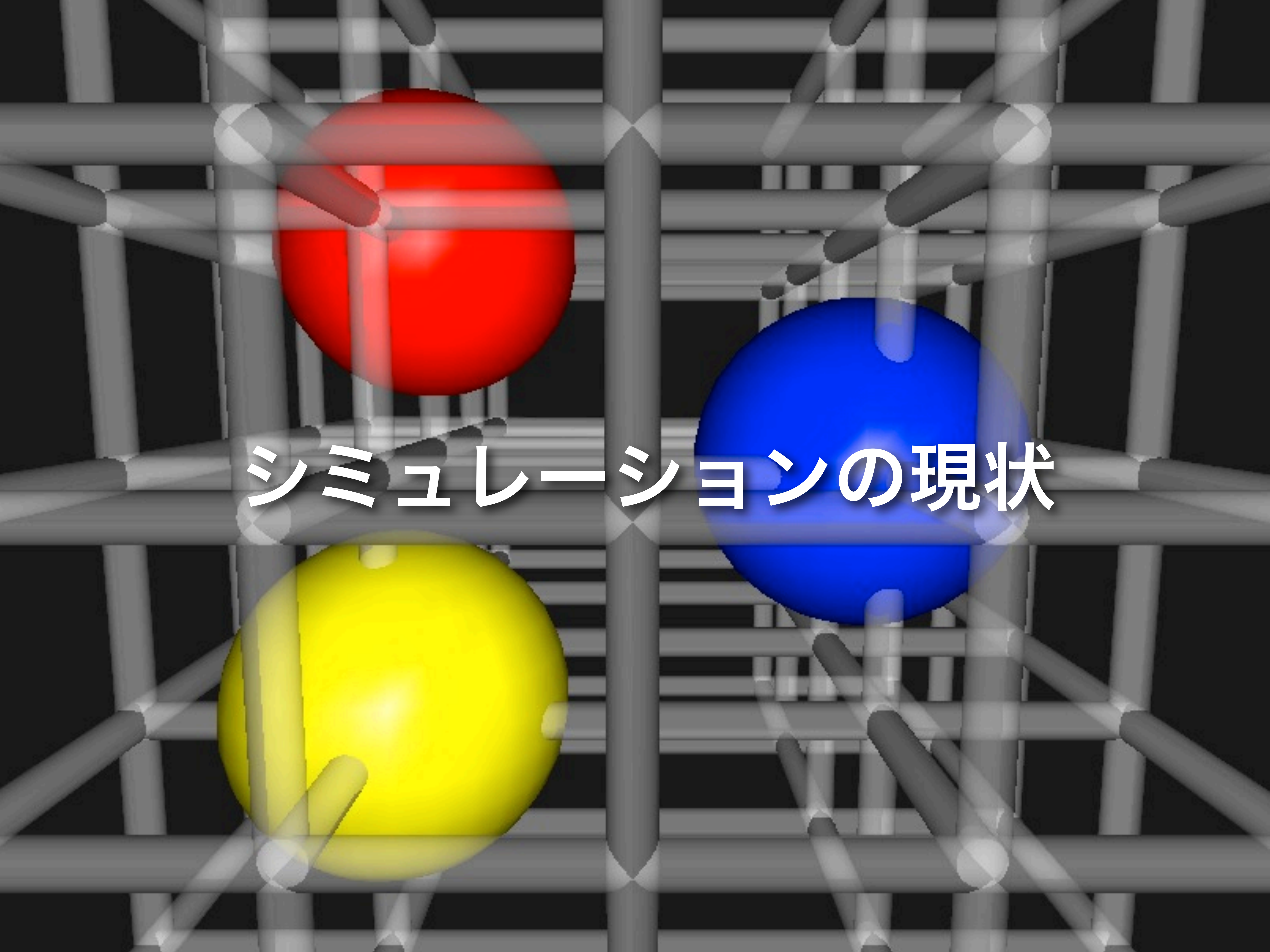
- クォーク真空偏極：動的クォークの数
- 有限格子間隔 a :紫外発散の有限化
- 有限体積効果 L :格子点は有限
- クォーク質量の物理点へのカイラル外挿



動的クォークの数

$$
\begin{aligned}
\langle O(U,\psi)\rangle &= \frac{1}{Z}\int D\bar{\psi}D\psi DU\; O(U,\psi)e^{-S_G(U)-\bar{\psi}M(U)\psi} \\
&= \frac{1}{Z}\int DU\; O(U,M^{-1}(U))(\cancel{\det\{M(U)\}})^{N_f}e^{-S_G(U)} \\
&= \frac{1}{Z}\int DU\; O(U,M^{-1}(U))e^{-S_G(U)+\cancel{N_f\,\mathrm{TrLn}M(U)}}
\end{aligned}
$$

$$\det\{M(U)\} = 1 \Longleftrightarrow N_f = 0$$


シミュレーションの現状

格子QCDシミュレーションの５年前

- 動的クォークの数
  - ２＋１フレーバー（$m_u=m_d\neq m_s$, $m_{c,b,t}=\infty$）
- 格子間隔（カットオフ）
  - 1.5 GeV – 2.2 GeV
- 有限体積（空間のサイズ）
  - 2.0 fm – 3.0 fm
- クォークの質量（π中間子の質量)
  - 300 MeV 以下

格子QCDシミュレーションの現状

- 動的クォークの数
  - 1＋1＋1フレーバー（$m_u \neq m_d \neq m_s$, $m_{c,b,t}=\infty$）
  - 1＋1＋1＋1フレーバー（$m_u \neq m_d \neq m_s \neq m_c$, $m_{b,t}=\infty$）
- 格子間隔（カットオフ）
  - 2.0 GeV – 3.0 GeV
- 有限体積（空間のサイズ）
  - 3.0 fm – 8.0 fm
- クォークの質量（π中間子の質量)
  - 135 – 200 MeV (物理点直上を含む）