

冠動脈血流解析に対する インピーダンス境界条件と 流量制御

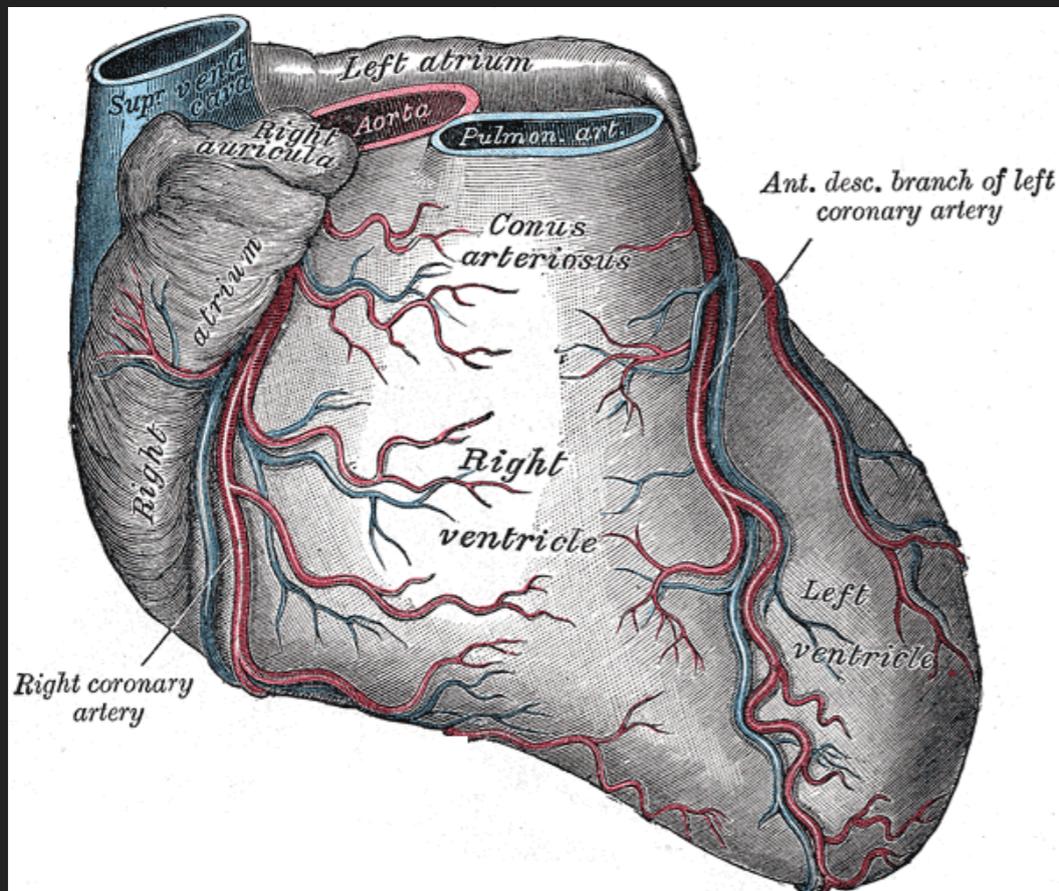
宇田 智紀

東北大学 AIMR 数学連携グループ 助教

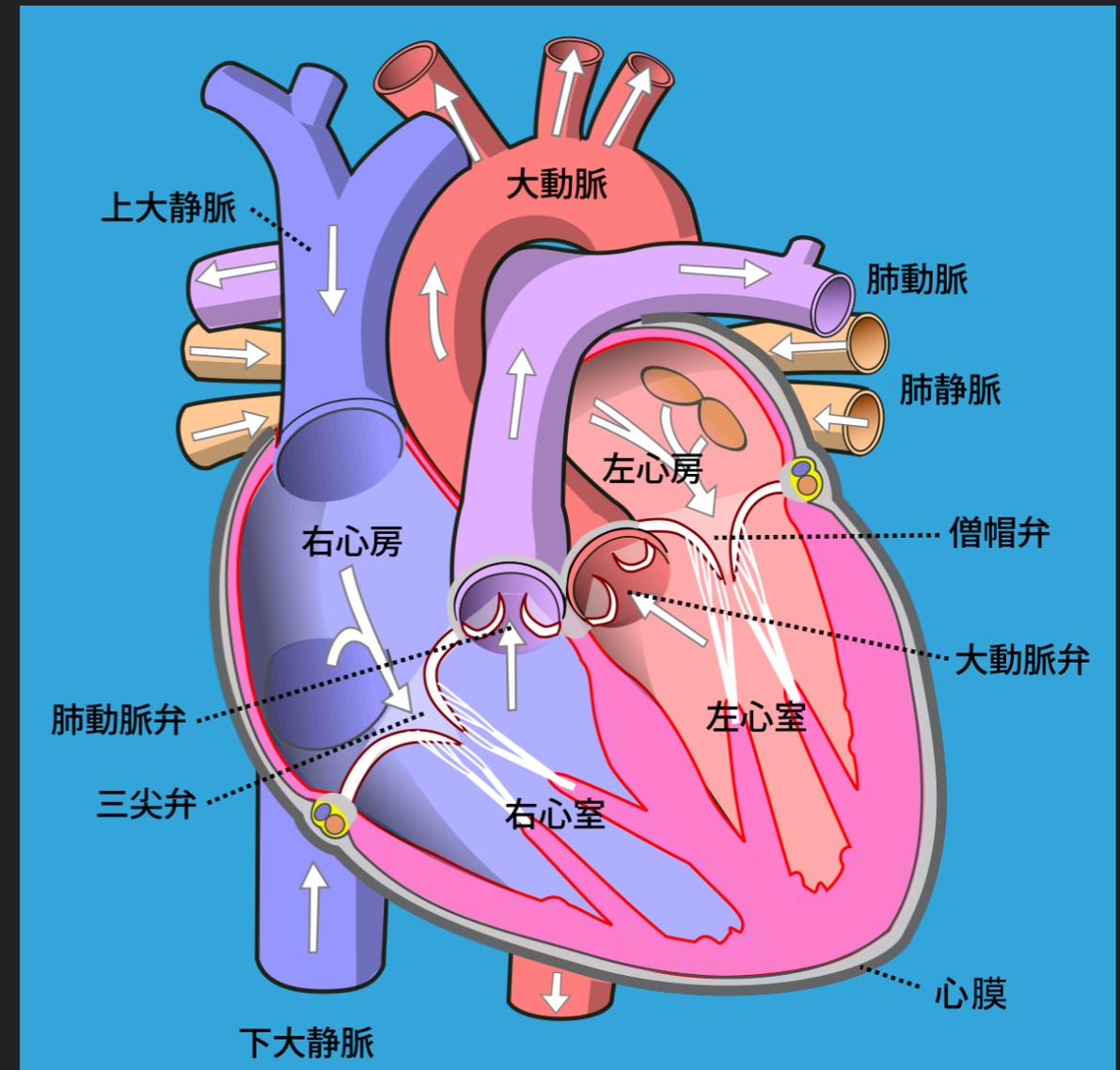


大動脈・冠動脈

- ▶ 大動脈は全身に栄養を送る
- ▶ 冠動脈は心筋に栄養を送る



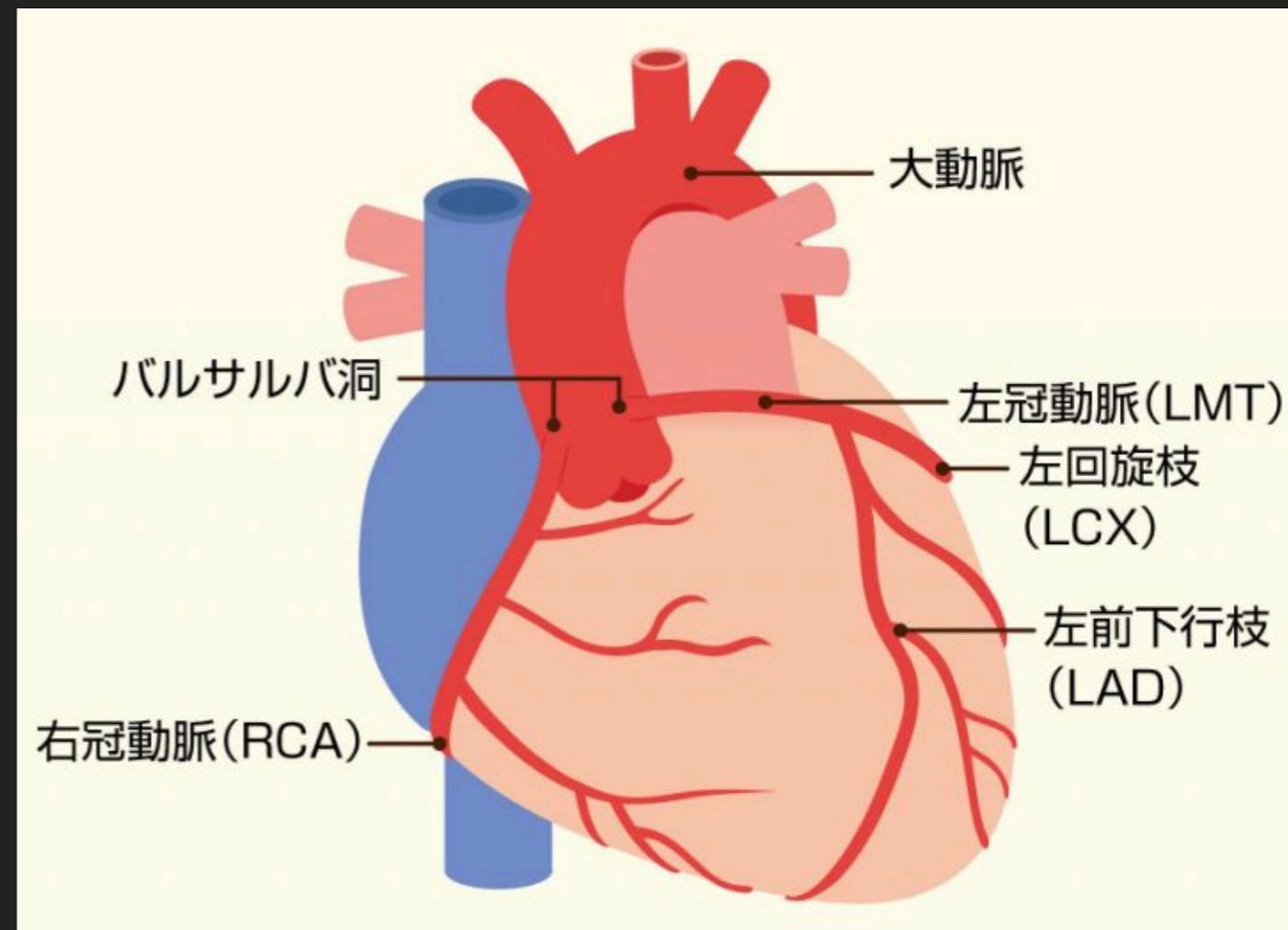
CC3.0 jaWp



CC3.0 jaWp

バルサルバ洞

- ▶ 左心室直上で大動脈と左右冠動脈に分岐する部分
 - ▶ 動脈血総量の **95%** が大動脈に
 - ▶ 残り **5%** が左右冠動脈に
(心筋に栄養を運ぶ)
- ▶ 径
 - ▶ バルサルバ洞 30～35 mm
 - ▶ 大動脈 25～30 mm
 - ▶ 冠動脈 1～4 mm



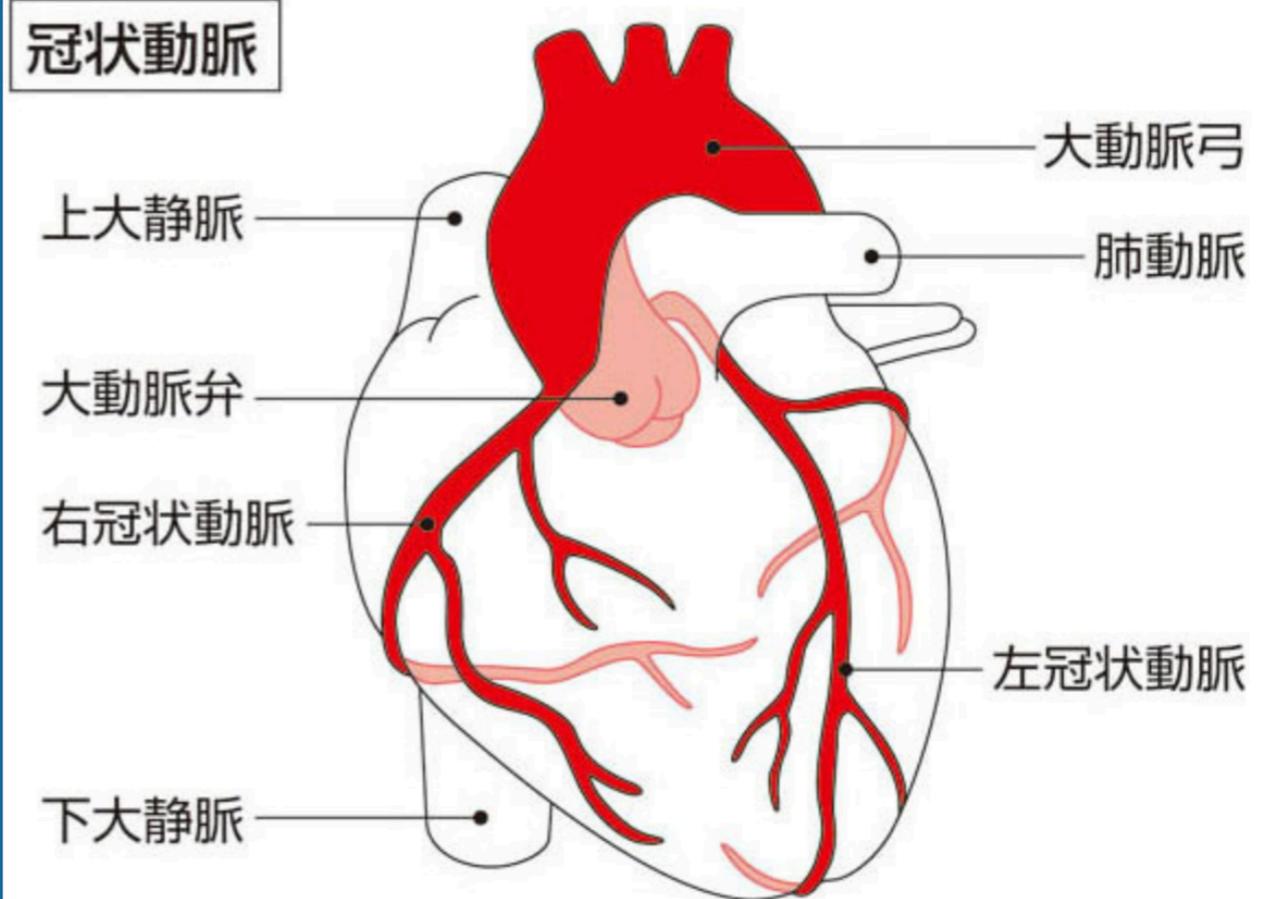
冠動脈血流解析の動機

- ▶ 冠動脈は心筋を動かす上で非常に重要な血管
 - ▶ 冠動脈血流障害は心機能に直ちに悪影響
 - ▶ 例) 冠動脈狭窄/閉塞 → **急性心筋梗塞**
- ▶ なぜ冠動脈の血流シミュレーションがしたいのか
 - ▶ 心臓カテーテル検査には一定のリスク ↔ CT 診断できると良い
 - ▶ 個人差の大きい冠動脈走向や断面形状の幾何と予後の関係性を知りたい。それが**臨床への大きな貢献**になる。
- ▶ 課題：数値計算をする上で冠動脈幾何に由来する様々な問題点

数値計算上の困難

- ▶ 複雑な形状
 - ▶ CT 画像からのメッシュ生成 (segmentation, smoothing, ...)
 - ▶ 境界層メッシュの導入は必須 → メッシュが非常に細かく
 - ▶ 曲がった管の直後の流出境界は逆流等による不安定性の原因に
- ▶ スケール差
 - ▶ 自由流出で **99%** 近くが大動脈に
- ▶ 現実的な境界条件？
 - ▶ 計算打ち切り境界での血流量等を実測するのは難しい

この部分にあったスクリーンショット画像は諸事情により削除してあります。



代替画像出典：<https://kotobank.jp/>

1. Introduction

2. Impedance & resistance B.C.

3. FEM & B.C.

- ▶ Traction term

4. Olufsen model

- ▶ Hagen-Poiseuille equation
- ▶ Fractal tree vessel model

5. Numerical results

2. IMPEDANCE & RESISTANCE B.C.

インピーダンスおよび
抵抗境界条件

非圧縮 NAVIER-STOKES 方程式の初期値境界値問題

速度 u , 圧力 p (未知関数) に対して,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u - \frac{1}{\rho} \nabla p,$$

$$\nabla \cdot u = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0 \text{ given,}$$

$$u = 0 \text{ on wall boundary,}$$

+ other boundary conditions .

境界条件は Dirichlet B.C. や Neumann B.C. がある :

$$u = f \text{ on boundary,}$$

$$(-pI + \mu \nabla u) n = g \text{ on boundary .}$$

(n ... 境界の外向き単位法線ベクトル, μ ... 粘性係数, ρ ... 密度)

今回は Neumann B.C. の一種である **インピーダンス / 抵抗境界条件** を扱う.

電気回路と血管網のアナロジー

▶ 抵抗（抵抗器, レジスタ）

- ▶ 電流を流れにくくさせる素子
- ▶ レジスタンス（電気抵抗） R

$$V = RI$$

▶ キャパシタ（コンデンサ）

- ▶ 電荷を蓄えられる素子
- ▶ キャパシタンス C

（静電容量, 電気容量）

$$V = Q/C$$

▶ 抵抗血管

- ▶ 毛細血管に分岐する手前の細動脈
- ▶ 血管の収縮拡張で断面積を変化させ
血圧を調整する働きを持つことから

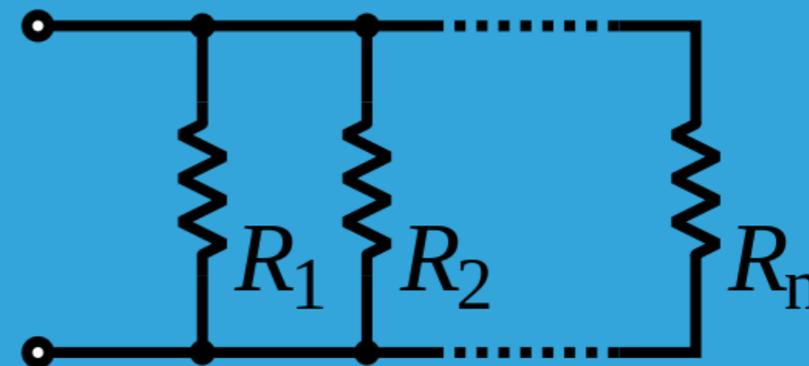
▶ 容量血管

- ▶ 単に静脈のこと
- ▶ 全身の血液の 75% を蓄えることから

この類推を境界条件に導入

→ インピーダンス / 抵抗境界条件

抵抗境界条件



CC3.0 jaWp

電圧差が電流に比例する ($V = RI$) ことの類推で, 境界条件を

$$p \approx R \int_{\Gamma} u \cdot n \, d\Gamma \quad \text{on } \Gamma \quad (\text{圧力差が流量に比例})$$

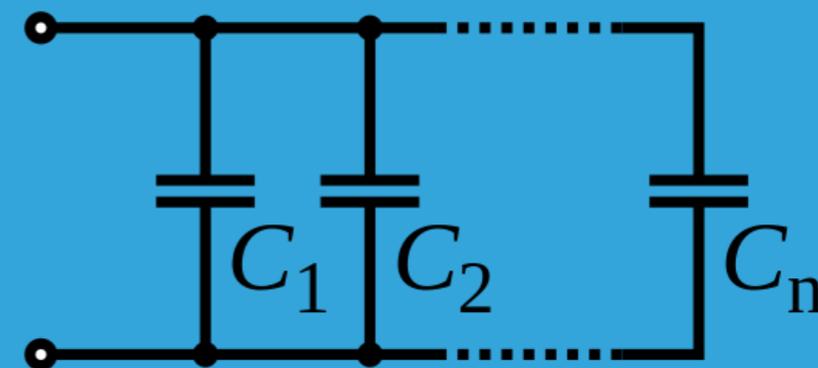
と定めたい. 非分離型解法では圧力に境界条件を直接指定することはできないので, 代わりに (pseudo) traction vector τ にこの比例関係

$$\tau(u, p) \cdot n = -R \int_{\Gamma} u \cdot n \, d\Gamma,$$

$$\tau(u, p) \equiv [-pI + \mu \nabla u] n$$

を要請するのが (狭義の) 抵抗境界条件である. (n は外向き単位法線)

インピーダンス境界条件



CC3.0 jaWp

インピーダンス \hat{z} は抵抗の一般化であり，波数空間で同様の比例関係が成り立つ．したがって，心拍周期 T の区間で圧力波数と流量波数を

$$\hat{p} \approx \hat{z} \hat{q} \text{ on } \Gamma, \quad q \equiv \int_{\Gamma} u \cdot n \, d\Gamma \quad (\text{ここで } (\cdot)^{\wedge} \text{ はフーリエ変換})$$

と関係づけたい．ここでも同様に，traction vector τ の波数にこの比例関係を要請し，さらにフーリエ逆変換した

$$\tau(u, p) \cdot n = -z^* q = -\frac{1}{T} \int_0^T z(s) q(t - s) \, ds$$

がインピーダンス境界条件である．

インピーダンス／抵抗境界条件まとめ

- ▶ 記号・定義

- ▶ Pseudo traction vector $\tau(u, p) \equiv [-pI + \mu \nabla u] n$

- ▶ 境界 Γ での流出量 $q \equiv \int_{\Gamma} u \cdot n \, d\Gamma$

- ▶ 抵抗境界条件 **RBC**

- ▶ 期待する効果： $p \approx Rq$ on Γ (圧力差が流量に比例)

- ▶ 定式化： $\tau(u, p) \cdot n = -Rq$

- ▶ インピーダンス境界条件 **IBC**

- ▶ 期待する効果： $\hat{p} \approx \hat{z} \hat{q}$ on Γ (圧力波数が流量波数に比例)

- ▶ 定式化： $\tau(u, p) \cdot n = -z^* q$

インピーダンス／抵抗境界条件の色々

- ▶ 自由流出境界 (do-nothing BC) は抵抗 0 の RBC
- ▶ インピーダンスプロファイル z としてディラックのデルタ関数をとれば IBC は RBC に一致
- ▶ IBC も RBC も（間接的に）圧力勾配を制御する境界条件であり、「流量増加に抵抗がかかる＝流れにくくなる」効果をもつ
 - ▶ RBC は現在の流量に対する（直流）抵抗
（現時刻の流量に対して抵抗がかかる＝抵抗素子）
 - ▶ IBC は過去の流量に対する（交流）抵抗
（一定の許容量までは抵抗が小さい＝キャパシタ）
- ▶ 圧力差を考えるため基準圧力 $p_0(t)$ を導入する定式化も

抵抗境界条件の変種

- ▶ [Stablized RBC] Y. Bazilevs, J. R. Gohean, et al. 2009
 - ▶ 不安定化を回避するための “regularized” traction vector

$$\tilde{\tau}(u, p) = \tau(u, p) + \rho[u \cdot n]_- u$$

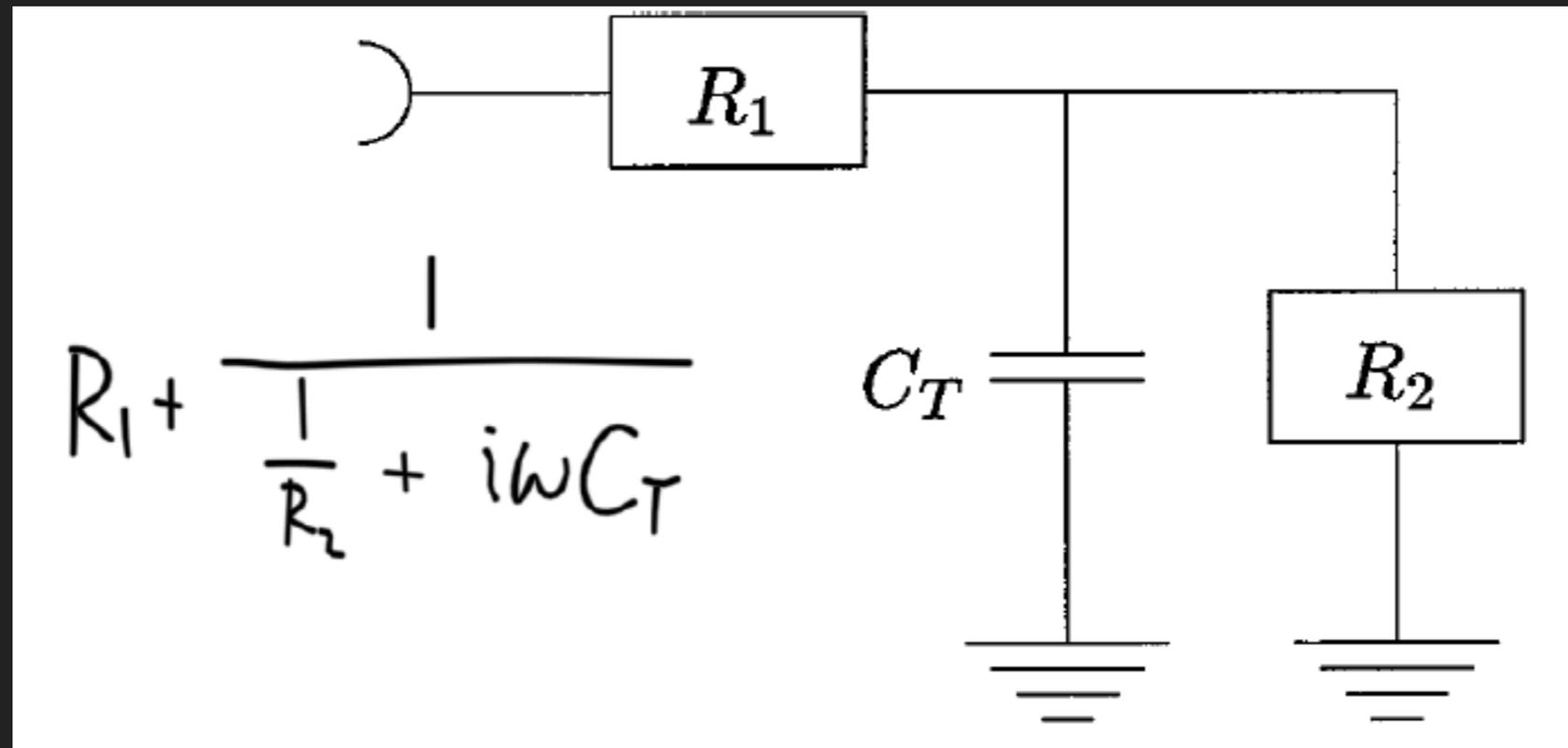
($[\cdot]_-$ は負部)

- ▶ $[u \cdot n]_-$ は逆流部分
- ▶ [逆流ペナルティ] N. Saito, G. Zhou. 2015
 - ▶ 逆流に対するペナルティ項を導入

$$\frac{1}{\varepsilon}[u \cdot n]_-, \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

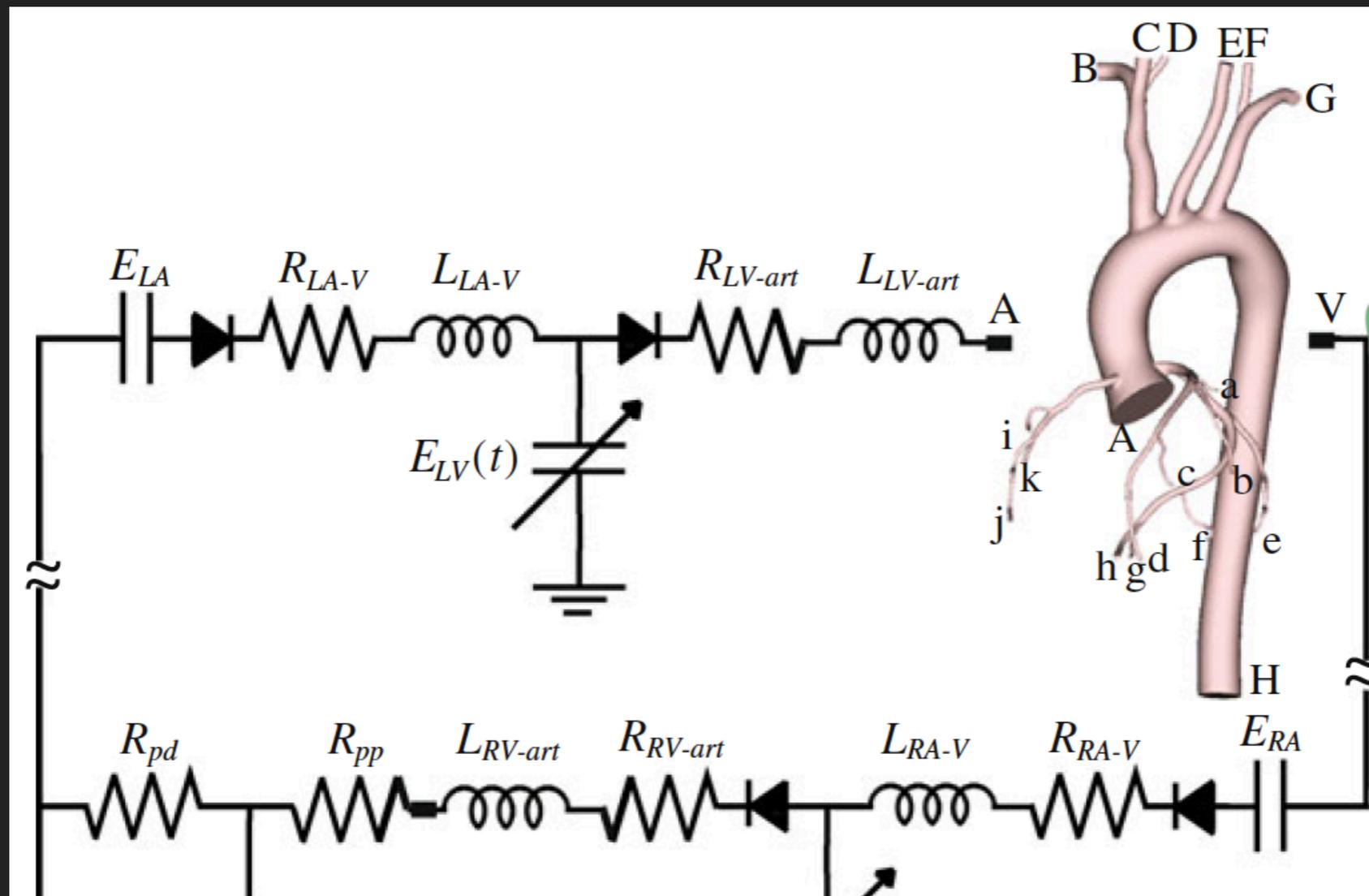
WINDKESSEL MODEL

- ▶ Lumped parameter model の一つ
 - ▶ 弾性壁をもつ貯蓄層のモデル
 - ▶ 3 elements windkessel model を表す電気回路の例：



より複雑な閉回路モデル

左心室を出て弁を通過して大動脈を通過して全身を巡って静脈に貯まって右心室に戻ってきて~~~~ というのをモデル化している例



2. FEM & BOUNDARY CONDITIONS

有限要素法と境界条件

(再掲) 非圧縮 NAVIER-STOKES 方程式の初期値境界値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u - \frac{1}{\rho} \nabla p,$$

$$\nabla \cdot u = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0 \text{ given,}$$

$$u = 0 \text{ on wall boundary,}$$

+ other boundary conditions .

Dirichlet / Neumann B.C. :

$$u = f \text{ on boundary,}$$

$$\tau(u, p) = g \text{ on boundary .}$$

TRACTION BOUNDARY CONDITIONS

- ▶ 厳密に言うところここで述べた $\tau(u, p)$ は物理的な traction ではない.....
 - ▶ 本当は stress tensor が入るが非圧縮の場合ほぼ同じものである
 - ▶ 区別するためこの τ は pseudo traction と呼ぶ流儀がある
 - ▶ FEM で（有限要素近似において）一致するとは限らないので要注意
- ▶ RBC も IBC も外向き法線方向成分 $\tau \cdot n$ のみ関係付けている
 - ▶ Hagen-Poiseuille 流（層流）の場合は接線方向成分 0
 - ▶ 管の打ち切り境界では接線方向成分は微小 $|\tau - (\tau \cdot n) n| \approx 0$

有限要素法 (FEM) のことを色々書く (予定)

- ▶ と思ったけれどどうも研究集会の趣旨から外れそうなのであまりテクニカル過ぎることは喋らないことにしました。

弱形式における RBC に対応する対称二次形式

$$\int_{\Gamma} v \cdot ((\tau(u, p) \cdot n) n) d\Gamma = R \int_{\Gamma} u \cdot n d\Gamma \int_{\Gamma} v \cdot n d\Gamma$$

(u は未知関数, v はそのテスト関数)

RBC & IBC IN FEM

- ▶ RBC → 対称二次形式

$$R \int_{\Gamma} u \cdot n \, d\Gamma \int_{\Gamma} v \cdot n \, d\Gamma$$

- ▶ IBC → 右辺 (既知) ベクトル

$$(z^* q) \int_{\Gamma} v \cdot n \, d\Gamma$$

- ▶ 陰的境界条件であることに注意 (つまり u, p は未知変数)

4. OLUFSEN'S FRACTAL TREE MODEL

OLUFSEN のフラクタル (再帰的) ツリー血管モデル

HAGEN-POISEUILLE の式 (法則)

円管内部の流体が層流である時に、圧力損失 Δp と流量 q の間に成り立つ「抵抗」の関係式

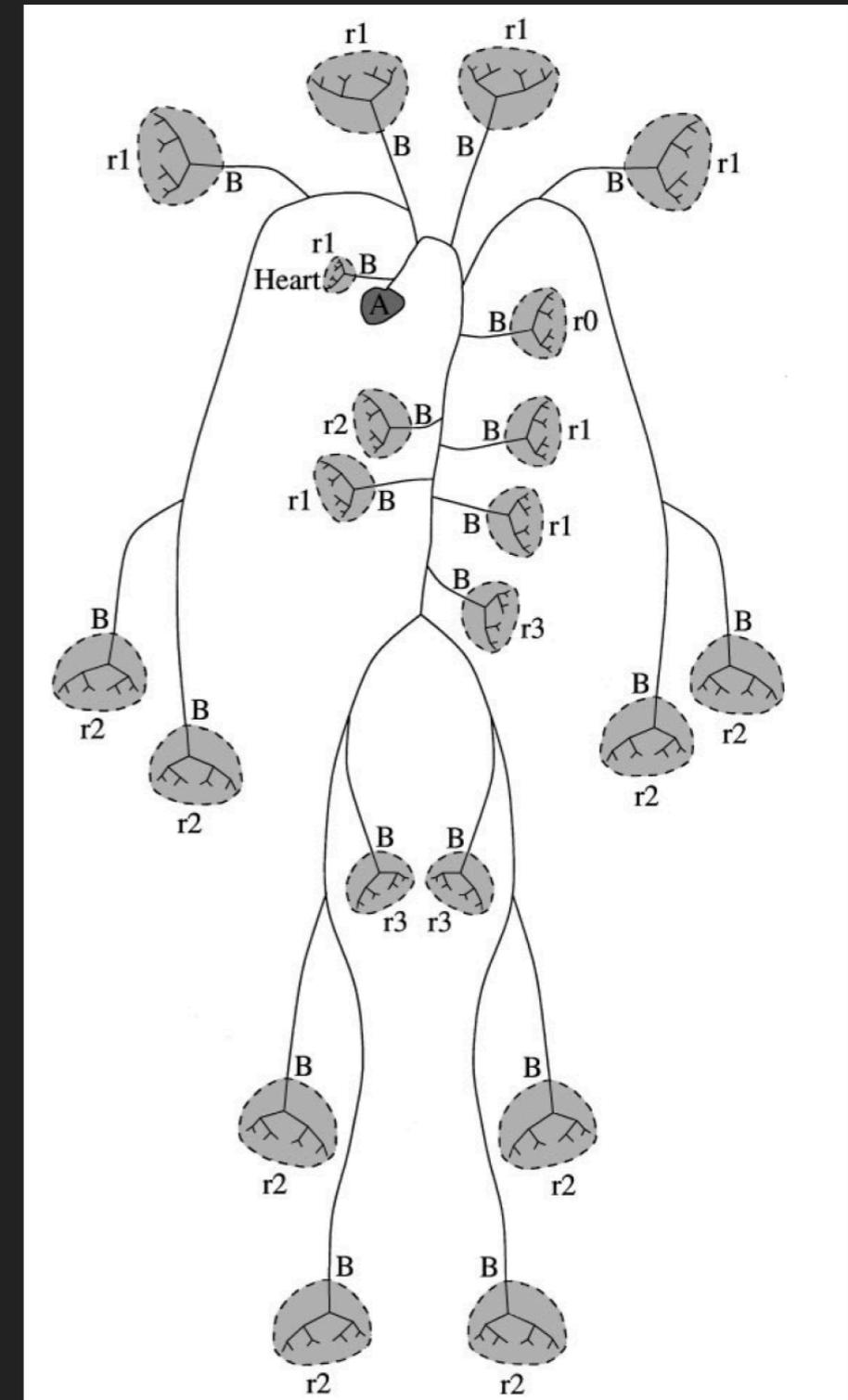
$$\Delta p = \frac{8\mu L}{\pi r^4} q.$$

(μ 粘性係数, L 円管長, r 円管半径)

- ▶ 圧力損失は流量に比例して大きくなる
(Cf. 電圧差は電流に比例 $V = RI$)
- ▶ 抵抗値は管が長く細いほど大きくなる

OLUFSEN のフラクタルツリー血管モデル

- ▶ インピーダンス / 抵抗境界条件での最大の問題は適切なインピーダンス / 抵抗の値の推定方法
- ▶ そこで Olufsen によるツリー血管モデルが有用
 - ▶ 計算メッシュから打ち切った先の血管網を1次元円管の再帰的なツリーで近似
 - ▶ 本来の「抵抗血管」「容量血管」の効果を経路電圧降下のアナロジーで近似
 - ▶ 交流項は並列回路のインピーダンス逆数和、直流項は Hagen-Poiseuille 式で求める



OLUFSEN のフラクタルツリー血管モデル

- ▶ (再掲) Hagen-Poiseuille の式

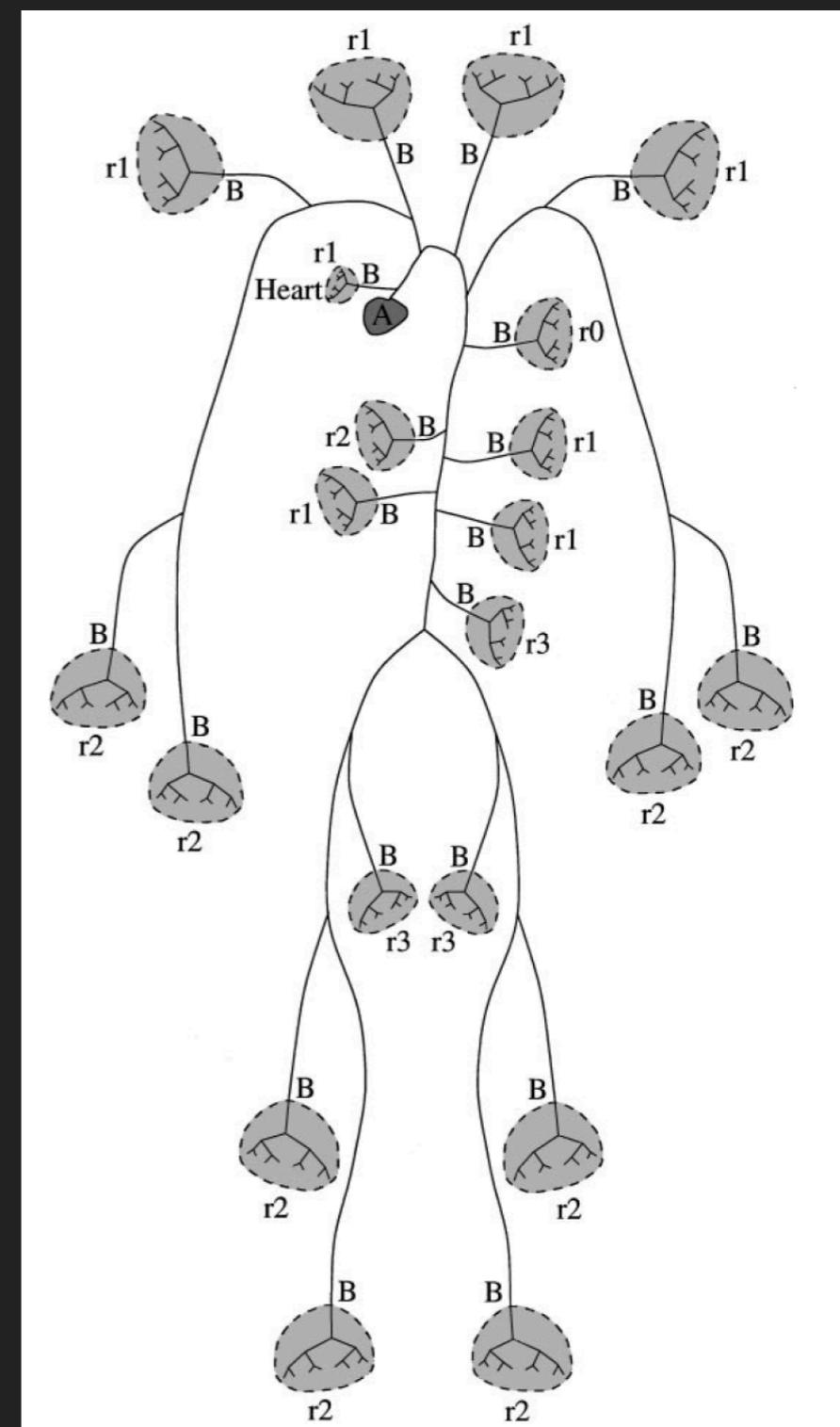
$$\Delta p = \frac{8\mu L}{\pi r^4} q$$

- ▶ フラクタルツリーモデルでは L と r の間の比例関係も仮定：

$$L = \alpha r$$

- ▶ したがって、抵抗は r の立方に反比例：

$$\Delta p = O(r^{-3})q$$

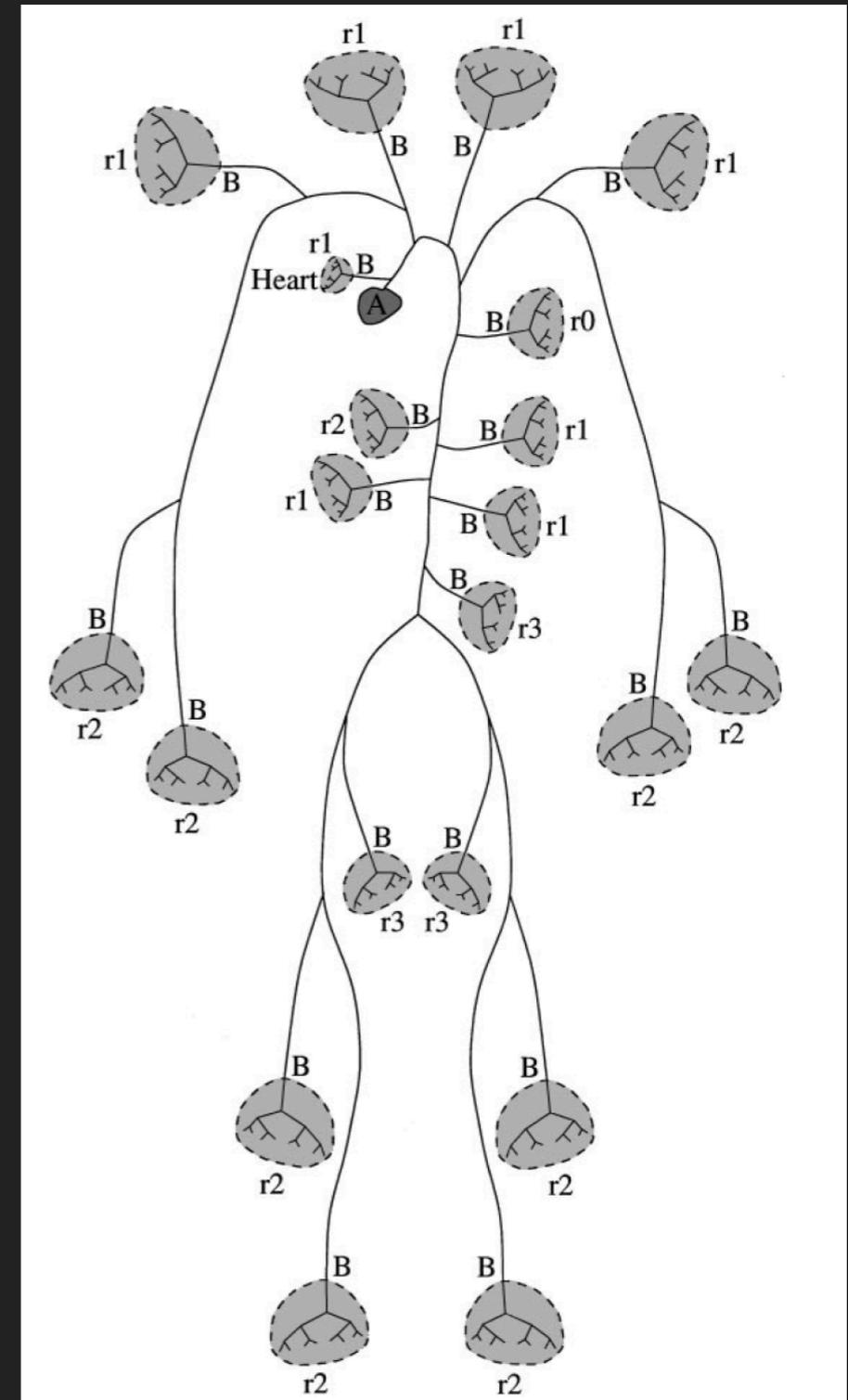


OLUFSEN のフラクタルツリー血管モデル

- ▶ 回路の分岐とインピーダンス

$$Z^{-1} = Z_1^{-1} + Z_2^{-1}$$

- ▶ これをフラクタルツリーの分岐の数だけ繰り返して足し上げる
 - ▶ r が閾値まで到達したら打ち切る
 - ▶ もしくは分岐回数で打ち切る



OLUFSEN モデルの「処方箋」

- ▶ あくまでインピーダンス／抵抗のスケールを推定できるだけ
 - ▶ 抵抗逆三乗則 → 打ち切りパラメータに対して敏感
 - (ツリー構造をちょっと変えただけで抵抗値が100倍に)
 - ▶ とても面倒くさい
- ▶ 実際は流量や圧力が（医学的に）望ましい値をとるよう微調整
 - ▶ まずは流入 [小], 圧力 [小], 抵抗 [小] から始めて徐々に上げていく (ramping)
 - ▶ 流入プロファイルで抵抗の効果が大きく変わる点も要注意
 - ▶ とても面倒くさい

OLUFSEN モデルから得て用いている抵抗値の例

▶ 例1

- ▶ バルサルバ洞 $3.35e+05$
- ▶ その他冠動脈 $2.73e+06 - 2.48e+07$

▶ 例2

- ▶ バルサルバ洞 $6.70e+04$

(上の計算で流量が偏り過ぎたので補正值を掛けたもの)

- ▶ その他冠動脈 $2.97e+07 - 2.70e+08$

5. NUMERICAL RESULTS

数值计算例

計算条件

- ▶ Numerical scheme
 - ▶ P1 FEM (1st order Polynomial Finite Element Method)
 - ▶ SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin)
 - ▶ PSPG (Pressure Stabilization Petrov Galerkin)
 - ▶ Crank-Nicolson
- ▶ Linear solver
 - ▶ GPBiCG
 - ▶ Jacobi preconditioning

計算条件

| | | | |
|--------------------------|------------------------------|----------------------------|-------------|
| ▶ computing platform: | GPU | ▶ # nodes: | 263502 |
| ▶ density: | 1047.3 (kg/m ³) | ▶ # tetrahedra: | 1367193 |
| ▶ dynamic viscosity: | 2.66e-3 (Ns/m ²) | ▶ # triangles: | 125252 |
| ▶ kinematic viscosity: | 2.54e-6 (m ² /s) | ▶ # variables: | 1054008 |
| ▶ reynolds number: | 14174 | ▶ representative length: | 0.03 (m) |
| ▶ time step: | 5e-5 (s) | ▶ representative velocity: | 1.2 (m/s) |
| ▶ # time steps: | 10000 | ▶ size of ematrix: | 2670.3 (MB) |
| ▶ stabilization epsilon: | 1e-09 | ▶ mesh length in X axis: | 110 (mm) |
| ▶ stopping criterion: | 1e-06 | ▶ mesh length in Y axis: | 95.9 (mm) |
| ▶ num_input_steps: | 10000 | ▶ mesh length in Z axis: | 89.4 (mm) |

初期条件は time step 1e-7 で微小流入・RBC で計算, さらに RBC ramping

この動画は諸事情により
削除してあります

課題

- ▶ 100 万変数 GPU 計算でも重い (そもそも行列計算が重い)
 - ▶ 10000 ステップ 0.5 秒 (1 心拍) 分の計算に 1 週間
 - ▶ CFL 条件から time step が $1e-5$ くらい細かくないと不安定化の要因に
- ▶ 安定化手法を導入したいが.....
 - ▶ 先に述べたものは非線型問題を解く必要がある
 - ▶ 100 万変数問題に導入するには現実的でない
 - ▶ 逆流安定化 / 罰則 RBC の線型化版?

まとめ

- ▶ 電気回路の抵抗のアナロジーとして RBC/IBC を紹介
- ▶ スケール差があり複雑な幾何形状を持つ冠動脈血流のシミュレーションは困難
 - ▶ 特に曲率の効果（流出境界の不安定性と逆流）
 - ▶ 丁寧にメッシュを作らないと収束しない（分岐形状等）
- ▶ 流出量の制御に RBC/IBC は有用
 - ▶ 医学分野では Hagen-Poiseuille の法則に基づく考察や測定手法も多く、
現実に寄せるという目的において Olufsen model は妥当・リーズナブル
 - ▶ ただ Olufsen model はパラメータ鋭敏で使いづらい面もある
→ 欠点を理解して正しく使いましょう