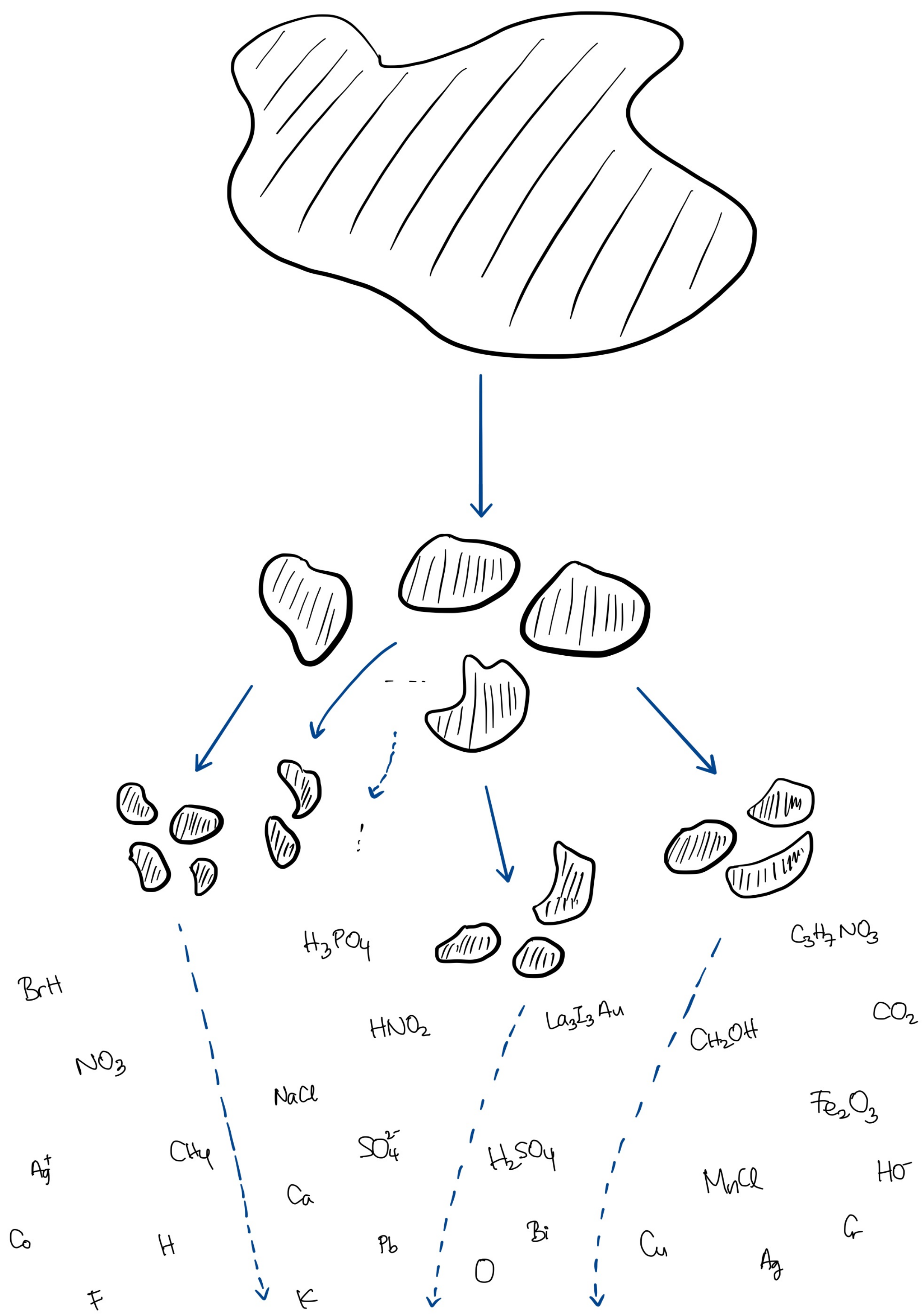
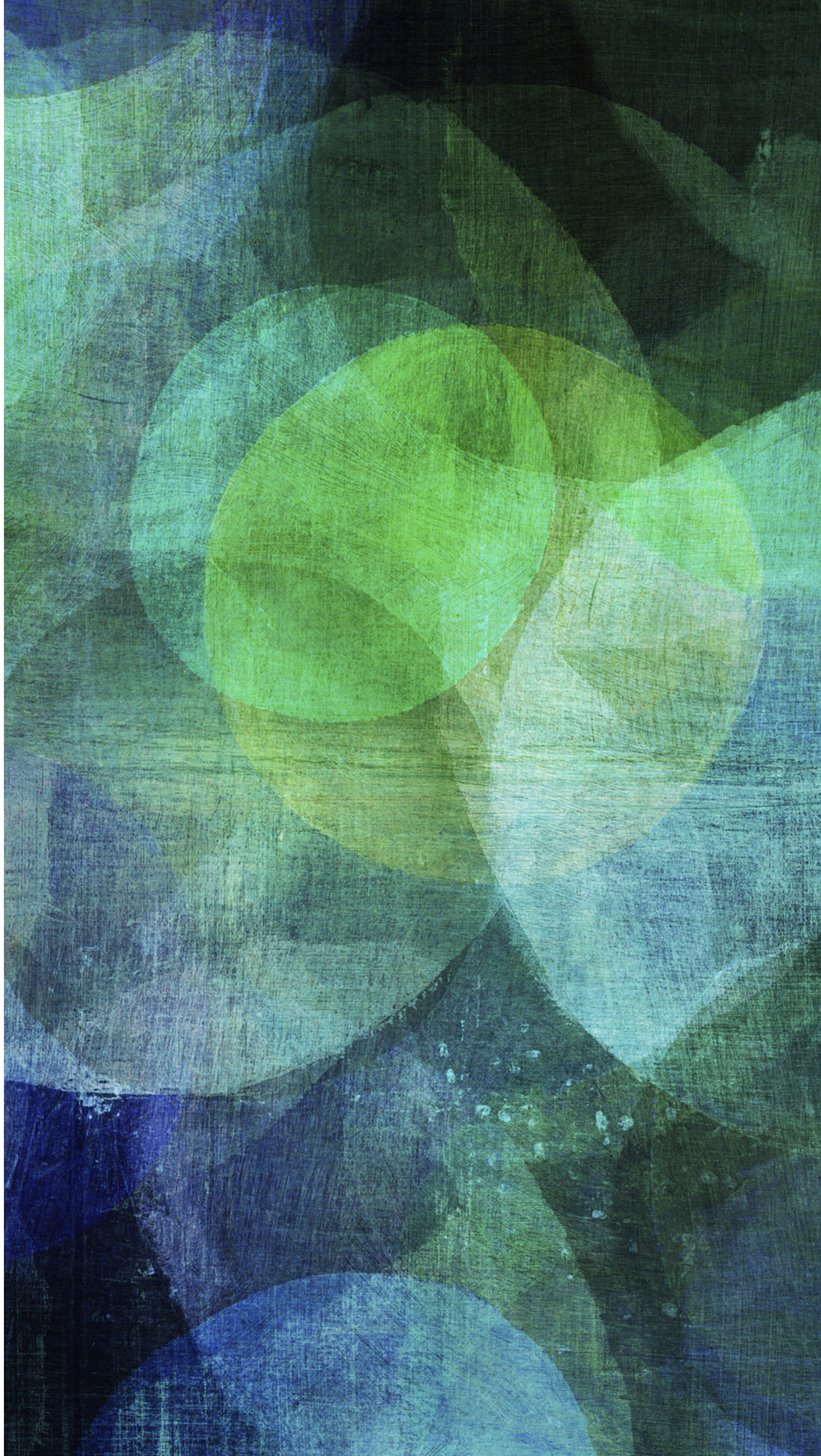
ゼータ関数とL関数、そして、それらに作られた世界

Ade Irma Suriajaya (chacha)
アデ イルマ スリアジャヤ（チャチャ）


H_3PO_4
$C_3H_7NO_3$
BrH
HNO_2
La_3I_3Au
CH_2OH
CO_2
NO_3
NaCl
Fe_2O_3
Ag^+
CH_4
SO_4^{2-}
H_2SO_4
HO^-
MnCl
Ca
Co
H
Pb
Bi
Cu
Cr
O
Ag
F
K

素粒子



$$\underline{23\ 159\ 723\ 189\ 571}$$

$$3 \times \underline{7\ 719\ 907\ 729\ 857}$$

$$3 \times \underline{2\ 573\ 302\ 576\ 619}$$

$$37 \times \underline{69\ 548\ 718\ 287}$$

$$379 \times 183\ 505\ 853$$

$$\therefore \mathbf{23\ 159\ 723\ 189\ 571 = 3^2 \times 37 \times 379 \times 183\ 505\ 853}$$

「数」を「素数」に分解する

数学（mathematics）

mathematic

mathematica

μάθημα (máthēma)

数学←MATHEMATICS←MÁTHĒMA

- 「μάθημα」は「知識」、「学問」、「科学」の意味を指す。
- 「数学」という学問は、「数」だけについて研究するわけではない。
- 「数学」分野において、
  - 量（数） → 数論
  - 構造 → 代数学
  - 空間 → 幾何学
  - 変化 → 解析学

  は研究対象である。

数論（整数論）← NUMBER THEORY

- 「数」（の性質）を研究する学問。
- 素数 ⇨ 自然数 ⇨ 整数 ⇨ さまざまな数の体系。
- 目標：「素数」の性質を理解すること。
- 初等整数論、解析的整数論、代数的整数論、超越数論、数論的力学系、数論幾何学、ディオファントス幾何学、保型形式論、組合わせ論、…

数論（整数論）← NUMBER THEORY

- 「数」（の性質）を研究する学問。
- 素数 ⇨ 自然数 ⇨ 整数 ⇨ さまざまな数の体系。

- 目標：「素数」の性質を理解すること。

- 初等整数論、解析的整数論、代数的整数論、超越数論、数論的力学系、数論幾何学、ディオファントス幾何学、保型形式論、組合わせ論、…

解析的整数論

- 「素数」の性質を解析的な手法を用いて、調べる。

- Riemann (1859)：「ゼータ関数」 ↔ 「素数」

その結果、「ゼータ関数」は数論において、主な解析的な手法となった。

ゼータ関数論

- 数論：
  - 解析的整数論
  - 代数的整数論
  - 保型形式
  - …
- グラフ理論
- 力学系

⇨ 量子力学、天文学、素粒子物理学（？）

ゼータ関数の誕生

Euler (1735):

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{1^{2k}}+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\frac{1}{5^{2k}}+\frac{1}{6^{2k}}+\cdots=(-1)^{k+1}\frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$$

B_{2k}: ベルヌーイ数

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{11}}\times\cdots=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

リーマンゼータ関数

Riemann (1859):

ディリクレ級数

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \left(\mathrm{Re}(s) > 1 \right)$$

$$= \prod_{p:\,\text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \qquad \left(\mathrm{Re}(s) > 1 \right)$$

オイラー積

$$= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s \int_1^{\infty} \frac{\lfloor x \rfloor - x + 1/2}{x^{s+1}} dx \qquad \left(\mathrm{Re}(s) > 0 \right)$$

関数等式

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \qquad (s \in \mathbb{C})$$

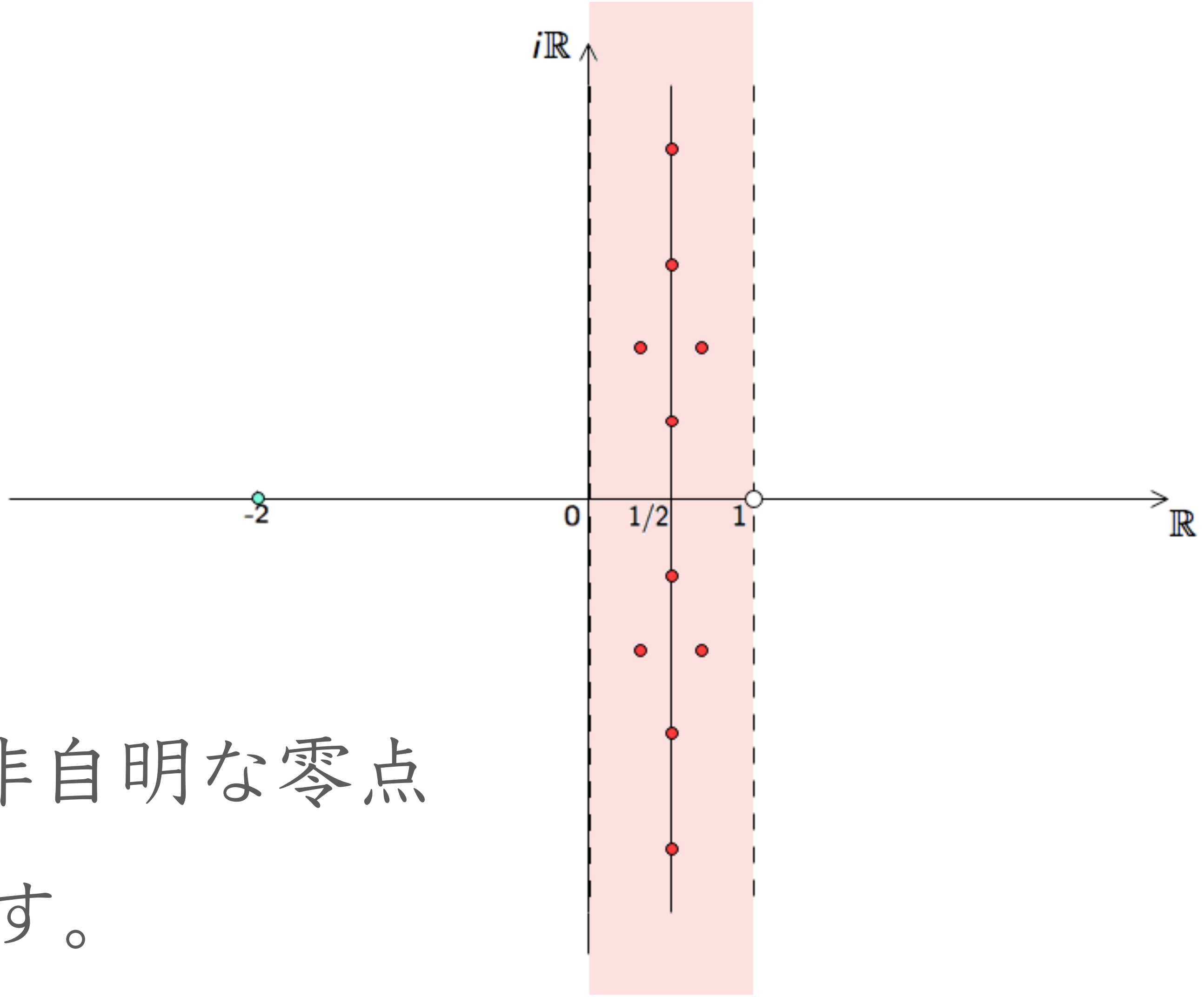
リーマンゼータ関数：極と零点

- オイラー積表示により、$\mathrm{Re}(s) > 1$ において、$\zeta(s) \neq 0$ 。
- $s = 1$ は $\zeta(s)$ の唯一な特異点であり、一位の極である。
- 関数等式により、$\mathrm{Re}(s) < 0$ において、$\zeta(\sigma + it) \neq 0 \quad (t \neq 0)$ 。
- $\zeta(s)$ は $s = -2, -4, -6, -8, \ldots$ において、一位の零点を持つ。（自明な零点）
- その他の零点は、$0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ 上でしか存在し得ない。（非自明な零点）

非自明な零点、リーマン予想

- $\zeta(s)$ の非自明な零点 ρ に対して、

$$\text{(i)}\ \ \mathrm{Im}(\rho) \neq 0, \qquad \text{(ii)}\ \ \zeta(\overline{\rho}) = 0, \qquad \text{(iii)}\ \ \zeta(1-\overline{\rho}) = 0.$$



リーマン予想（RH）：$\zeta(s)$ の非自明な零点 ρ は全て、$\mathrm{Re}(\rho) = 1/2$ を満たす。

非自明な零点と素粒子物理学

- （Dyson, 1960年代）ガウス型ユニタリ・アンサンブル(GUE)に従うランダム行列（エルミートランダム行列）の固有値の間隔の分布：

$$1 - \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2 + \delta(t) \qquad (※)$$

- （Montgomery, 1970年代初）$\zeta(s)$ の非自明な零点の縦方向の間隔の分布は（※）である。

- 1972年4月、プリンストン大学でのお茶の時間に、彼らの出会いで、その偶然が判明。

リーマン予想と素粒子物理学

- （HilbertとPólya, 1910年代前半）

  「リーマン予想」⇔「ハミルトニアンはエルミートである」

  と予想。

- （BerryとKeating, 1999）

  エネルギーレベルが $\zeta(s)$ の非自明な零点に

  完全に一致する量子システムが存在する

  と予想。

素数定理

$$\pi(x) := \#\{p \le x \mid p \text{ は素数}\}, \qquad \mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t$$

***Riemann (1859)*:** $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) +$ （小さい項）

***Hadamard, de la Vallée Poussin (1896)*:**

1) $\zeta(1+it) \neq 0, \qquad t > 0$

2) $\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(\dfrac{x}{\exp\left(a\sqrt{\log x}\right)}\right), \qquad \exists a > 0$

最良可能な評価

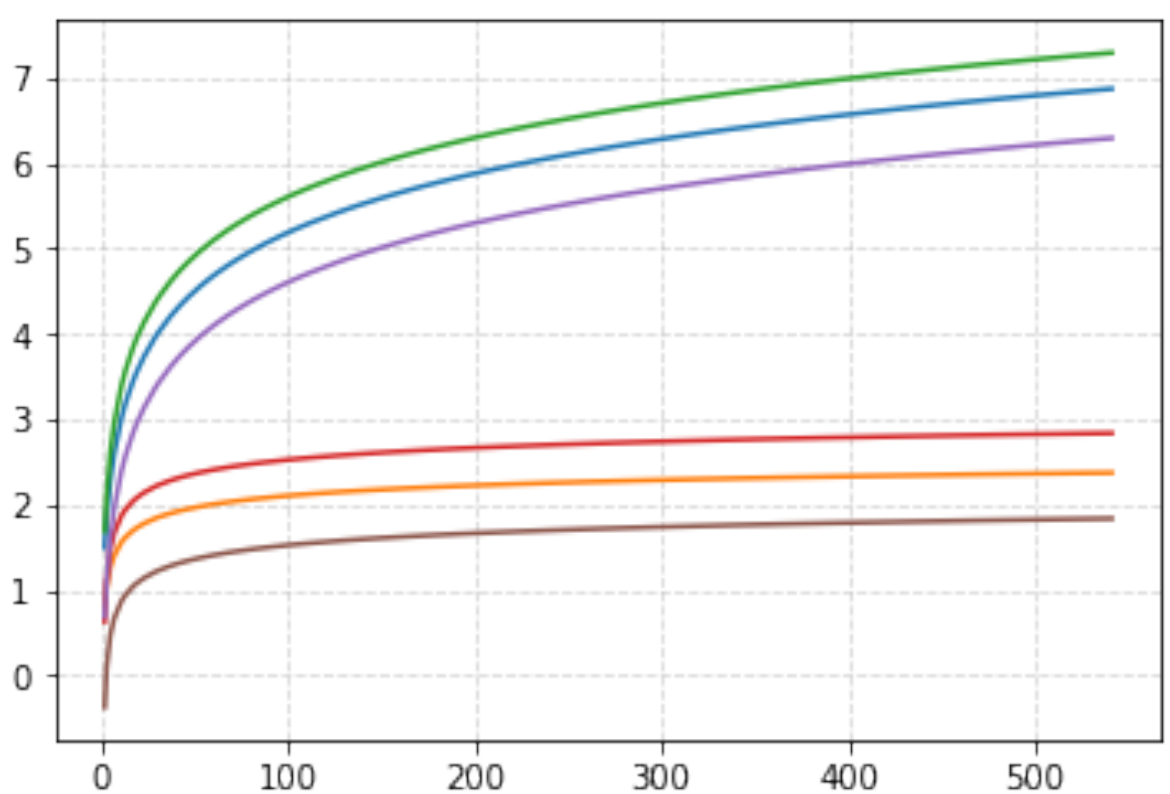
***Koch (1900)*:** $RH \quad \Longleftrightarrow \quad \pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(x^{1/2+\epsilon}\right), \quad \forall \epsilon > 0$

素数の密度

Euler (1737): $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{13} + \dfrac{1}{17} + \cdots = \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n:\,\text{自然数}}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots=\infty$$

$$\sum_{p:\,\text{素数}}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots=\infty$$



緑：$1+\log x$

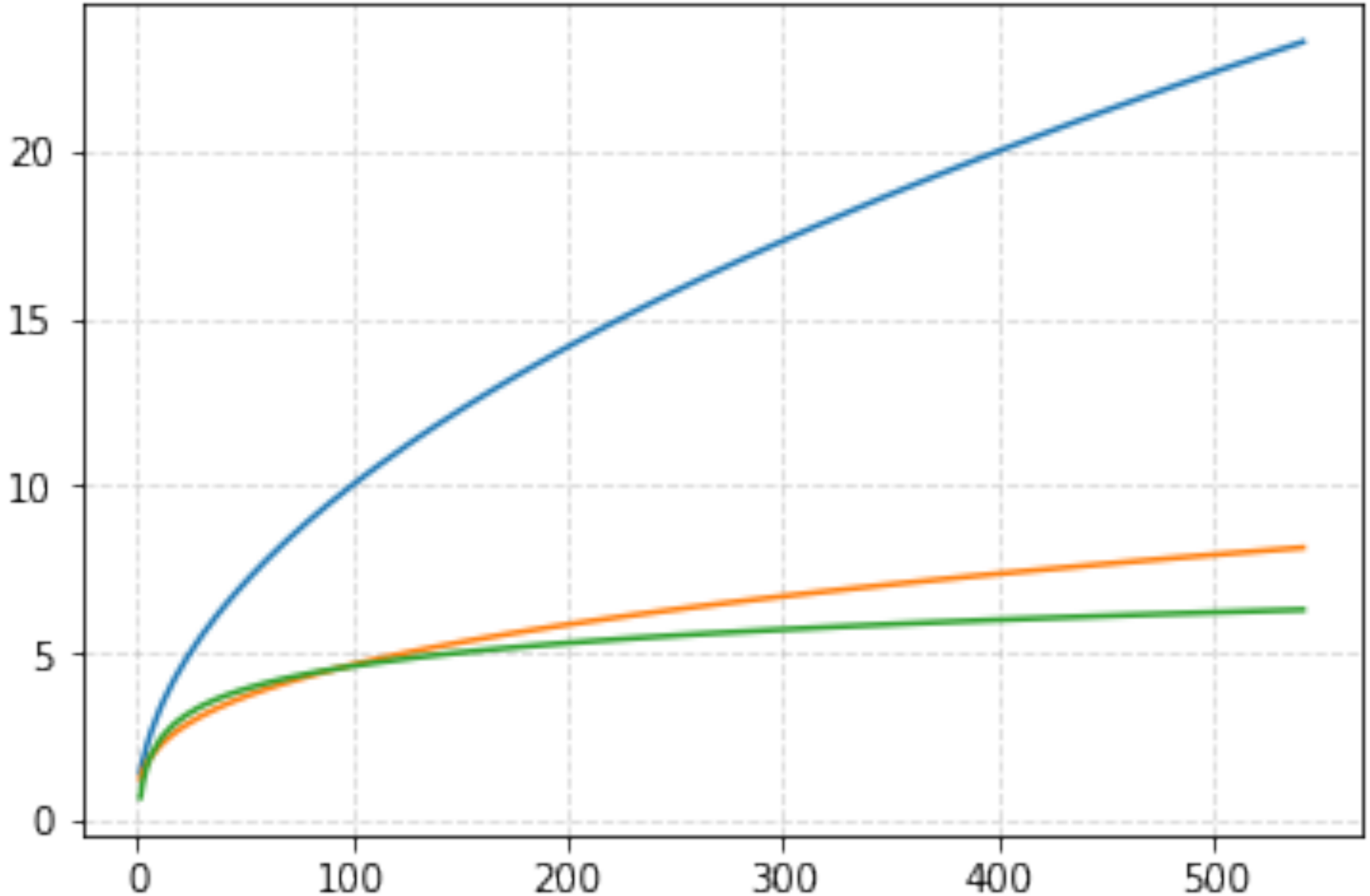
紫：$\log x$

赤：$1+\log\log x$

茶：$\log\log x$

青：$\displaystyle\sum_{n:\,\text{自然数}}\frac{1}{n}$

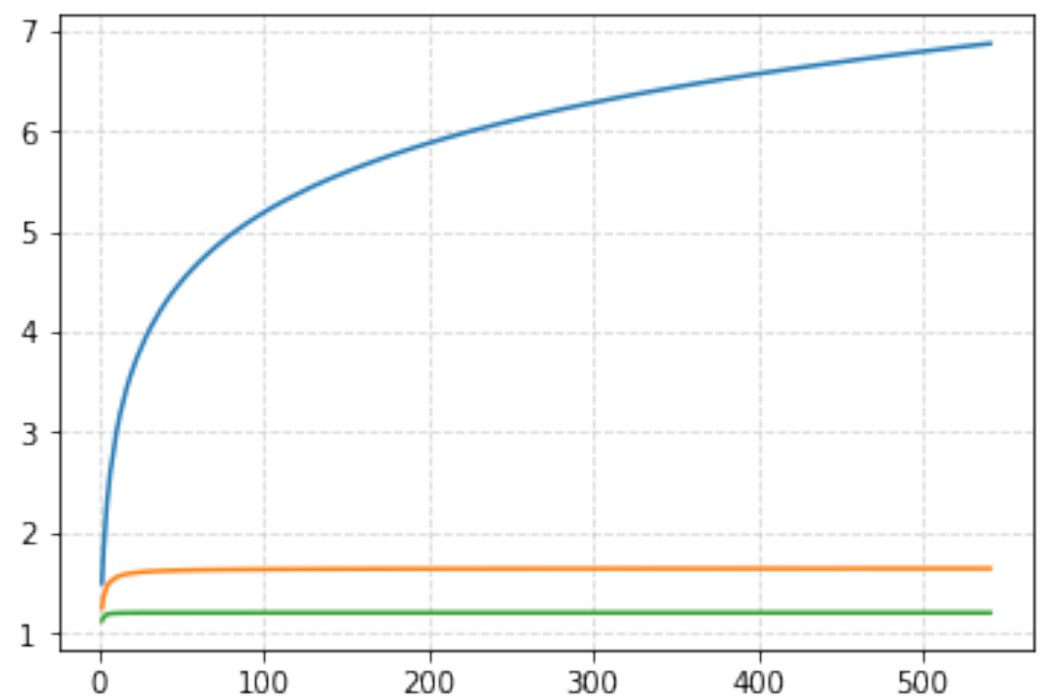
橙：$\displaystyle\sum_{p:\,\text{素数}}\frac{1}{p}$



青：$\sqrt{x}$　　橙：$\sqrt[3]{x}$　　緑：$\log x$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} + \cdots$$
$$= \frac{\pi^2}{6} < \infty$$



青： $\displaystyle\sum_{n:\text{自然数}} \frac{1}{n}$

橙： $\displaystyle\sum_{n:\text{自然数}} \frac{1}{n^2}$

緑： $\displaystyle\sum_{n:\text{自然数}} \frac{1}{n^3}$

等差数列上の素数

Euler (1737): $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}+\cdots=\infty$

Euler (1775): $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{19}+\dfrac{1}{23}+\dfrac{1}{31}+\dfrac{1}{43}+\cdots=\infty$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{29}+\frac{1}{37}+\frac{1}{41}+\frac{1}{53}+\cdots=\infty$$

Dirichlet (1837): $\displaystyle\sum_{p\equiv a \bmod d}\frac{1}{p}=\infty$

$$\therefore\quad \forall a,d\in\mathbb{N}\ \ s.t.\ \ (a,d)=1,\quad \sharp\left\{k\in\mathbb{N}\mid a+kd\ \text{は素数}\right\}=\infty$$

$\therefore$ 任意の等差数列 $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ に素数は無限個ある。

ディリクレ指標

mod (法)	$\chi \setminus n$	0	1	2	3	4	5
mod 1	$\chi_0(n)$	1					
mod 2	$\chi_0(n)$	0	1				
mod 3	$\chi_0(n)$	0	1	1			
	$\chi_1(n)$	0	1	-1			
mod 4	$\chi_0(n)$	0	1	0	1		
	$\chi_1(n)$	0	1	0	-1		
mod 5	$\chi_0(n)$	0	1	1	1	1	
	$\chi_1(n)$	0	1	i	-i	-1	
	$\chi_2(n)$	0	1	-1	-1	1	
	$\chi_3(n)$	0	1	-i	i	-1	
mod 6	$\chi_0(n)$	0	1	0	0	0	1
	$\chi_1(n)$	0	1	0	0	0	-1

等差数列上の素数

Euler (1737): $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots=\infty$

Euler (1775): $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\frac{1}{31}+\frac{1}{43}+\cdots=\infty$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{29}+\frac{1}{37}+\frac{1}{41}+\frac{1}{53}+\cdots=\infty$$

Dirichlet (1837): $\displaystyle\sum_{p\equiv a \bmod d}\frac{1}{p}=\infty$

$$\therefore \quad \forall a,d\in\mathbb{N} \;\; s.t. \;\; (a,d)=1, \quad \sharp\left\{k\in\mathbb{N} \mid a+kd \text{ は素数}\right\}=\infty$$

$\therefore$ 任意の等差数列 $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ に素数は無限個ある。

等差数列上の素数

Euler (1737): $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\cdots=\infty$

Euler (1775): $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\frac{1}{31}+\frac{1}{43}+\cdots=\infty$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{29}+\frac{1}{37}+\frac{1}{41}+\frac{1}{53}+\cdots=\infty$$

Dirichlet (1837): $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}\neq 0 \quad \left(\forall\chi\neq\chi_0\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{p\equiv a \bmod d}\frac{1}{p}=\infty$

$$\therefore \quad \forall a,d\in\mathbb{N} \ \ s.t. \ \ (a,d)=1, \quad \sharp\left\{k\in\mathbb{N} \mid a+kd \text{ は素数}\right\}=\infty$$

∴ 任意の等差数列 $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ に素数は無限個ある。

ディリクレL関数

$$L(s,\chi) = \frac{1}{1^s} + \frac{\chi(2)}{2^s} + \frac{\chi(3)}{3^s} + \frac{\chi(4)}{4^s} + \frac{\chi(5)}{5^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad \left(\, \mathrm{Re}(s) > 1 \,\right)$$

ディリクレ級数

Dirichlet (1837): $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \neq 0 \quad \left(\forall \chi \neq \chi_0 \right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{p \equiv a \bmod d} \frac{1}{p} = \infty$

$L(1+it,\chi) \neq 0 \quad \left(t > 0,\, \chi \neq \chi_0 \right) \quad \Longrightarrow \quad$ 「算術級数の素数定理」

$$\pi_{a,d}(x) := \#\left\{ p \leq x \mid p \text{ は素数},\ p \in \{a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots\} \right\},$$

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t, \qquad \varphi(n) := \#\left\{ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid (k,n) = 1,\ k \leq n \right\}$$

de la Vallée Poussin (1896?): $\displaystyle \pi_{a,d}(x) = \frac{1}{\varphi(n)} \mathrm{Li}(x) + \text{（誤差項）}$

ディリクレL関数

$$L(s,\chi) = \frac{1}{1^s} + \frac{\chi(2)}{2^s} + \frac{\chi(3)}{3^s} + \frac{\chi(4)}{4^s} + \frac{\chi(5)}{5^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad \left(\mathrm{Re}(s) > 1 \right)$$

ディリクレ級数

$$= \prod_{p:\,\text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \qquad \left(\mathrm{Re}(s) > 1 \right)$$

オイラー積

χ は原始的であるとき、無限級数 $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ で収束する。

κ を $\chi(-1) = (-1)^{\kappa}$ で定める。

関数等式

$$L(s,\chi) = \varepsilon(\chi) q^{1/2-s} 2^s \pi^{s-1} \sin\frac{\pi(s+\kappa)}{2} \Gamma(1-s) L(1-s,\overline{\chi}) \qquad (s \in \mathbb{C})$$

ディリクレL関数とリーマン予想

- χ を原始的とする。κ を $\chi(-1) = (-1)^{\kappa}$ で定める。
- $L(s,\chi)$ は $s = -\kappa, -2-\kappa, -4-\kappa, -6-\kappa, \ldots$ において、一位の零点を持つ。（自明な零点）
- $L(s,\chi)$ の非自明な零点 ρ に対して、$0 \leq \mathrm{Re}(\rho) \leq 1$ であり、

$$\text{(i)}\ \cancel{\mathrm{Im}(\rho) \neq 0}, \qquad \cancel{\text{(ii)}\ L(\bar{\rho},\chi) = 0}, \qquad \text{(iii)}\ L(1-\bar{\rho},\chi) = 0.$$

一般リーマン予想（GRH）：

$\zeta(s)$ と $L(s,\chi)$ の非自明な零点 ρ は全て、$\mathrm{Re}(\rho) = 1/2$ を満たす。

フルヴィッツゼータ関数

Hurwitz (1882)：

$$\zeta(s,\mathfrak{a}) = \frac{1}{\mathfrak{a}^s} + \frac{1}{(1+\mathfrak{a})^s} + \frac{1}{(2+\mathfrak{a})^s} + \frac{1}{(3+\mathfrak{a})^s} + \frac{1}{(4+\mathfrak{a})^s} + \frac{1}{(5+\mathfrak{a})^s} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\mathfrak{a})^s} \qquad \left(\mathrm{Re}(s) > 1,\ 0 < \mathfrak{a} \leq 1\right)$$

$$\zeta(s,1) = \zeta(s), \qquad \zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = \left(2^s - 1\right)\zeta(s)$$

$$\zeta(s) = k^{-s} \sum_{n=1}^{k} \zeta\left(s, \frac{n}{k}\right)$$

χ は q を法とする指標とし、$\varphi(n) = \#\left\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid (k,n) = 1,\ k \leq n\right\}$

$$L(s,\chi) = q^{-s} \sum_{r=1}^{q} \chi(r)\zeta\left(s, \frac{r}{q}\right), \qquad \zeta\left(s, \frac{n}{q}\right) = \frac{q^s}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(n) L(s,\chi)$$

フルヴィッツゼータ関数とリーマン予想

- 一般の $\mathfrak{a}$ に対して、$\zeta(s,\mathfrak{a})$ はオイラー積や関数等式を持たず、臨界領域 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 内に、臨界線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 以外のところにも非自明な零点がたくさんある。

一般のフルヴィッツゼータ関数には、リーマン予想がない！

- $\mathfrak{a}$ は有理数であるとき、$\zeta(s,\mathfrak{a})$ は以下のような一種の関数等式を満たす：

$$\zeta\left(1-s,\frac{n}{k}\right) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi k)^s}\sum_{r=1}^{k}\cos\left(\frac{\pi s}{2}-\frac{2\pi rn}{k}\right)\zeta\left(s,\frac{r}{k}\right).$$

セルバーグクラス

***Selberg (1989)*:**

リーマンゼータ関数に類似する関数の共通する振る舞いを考察したい。

そこで、良い代数的構造を持つような大きな関数族を考え、それらの線形結合の値分布を調べたい。

数論的関数 $f(n)$ に対して、$\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束するかつ、次の条件を満たす関数

$$\mathscr{L}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

の関数族を考える。

セルバーグクラス

- ラマヌジャン予想：$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$f(n) \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$.
- 解析接続：$\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ s.t. $(s-1)^k \mathscr{L}(s)$ は有限位数の整関数。
- 関数等式：
$$\Phi(s) = \omega \overline{\Phi(1-\overline{s})}$$
ここで、
$$\Phi(s) := Q^s \left(\prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) \right) \mathscr{L}(s),$$
$Q, \lambda_i \in \mathbb{R}_{>0}$ であり、$\mu_j, \omega \in \mathbb{C}$ は $\mathrm{Re}(\mu_j) \geq 0$ と $|\omega| = 1$ を満たす。
- オイラー積：
$$\mathscr{L}(s) = \prod_{p\,:\,\text{素数}} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)}{p^{ks}} \right) \qquad (\,\mathrm{Re}(s) > 1\,)$$
ここで、$\exists \theta < 1/2$ s.t. $b(n) \ll n^{\theta}$.

最後に〜

個人サイト

https://sites.google.com/site/adeirmasuriajaya

Ade Irma Suriajaya

とグーグれば、私の情報がいろいろ出てくる。

- adeirmasuriajaya@riken.jp

  または

- adeirmasuriajaya@math.kyushu-u.ac.jp

Tak
感謝
Merci
Баярлалаа
감사합니다
Tack
Ευχαριστώ
cảm ơn bạn
Vielen Dank
Labai ačiū
Obrigado
Kiitos
நன்றி
Спасибо
ขอบคุณค่ะ
धन्यवाद्
Terima kasih
谢谢
ধন্যবাদ
Thank you
Matur nuwun
Gracias
teşekkür ederim
Köszönöm
شكرا
Хвала вам
بہت شکریہ
Grazie
ありがとうございます
תודה
Takk
多謝
Salamat po
Dziękuję