フェルミ超流動の多体理論:
冷却原子気体から中性子星へ

HT, T. Hatsuda, P. van Wyk, and Y. Ohashi, Scientific Reports **9**, 18477 (2019).

田島裕之(高知大理工)

共同研究者: 初田哲男(理研iTHEMS),

P. van Wyk(慶大理工), 大橋洋士(慶大理工)

SCIENTIFIC REPORTS
natureresearch

OPEN

Superfluid Phase Transitions and Effects of Thermal Pairing Fluctuations in Asymmetric Nuclear Matter

Hiroyuki Tajima[1*], Tetsuo Hatsuda[1,2], Pieter van Wyk[3] & Yoji Ohashi[3]

高知大学
Kochi University

RIKEN

自己紹介

http://www.uaa.keio.ac.jp/event/result/201009182126.html

研究経歴

2008~2012 慶應義塾大学物理学科
2012~2014 慶應義塾大学基礎理工学専攻修士課程
2014~2017 慶應義塾大学基礎理工学専攻博士課程
2015~2017 日本学術振興会特別研究員 (DC2)
2017~2019 理化学研究所　日本学術振興会特別研究員(PD)
2019~現在 高知大学 特任助教(新学術領域研究)

博士論文(主査: 大橋洋士教授)
"極低温フェルミ原子気体のBCS-BECクロスオーバー領域における熱力学的性質"

研究分野: 冷却原子気体, 中性子星, 超流動, 超伝導, etc…
趣味: ウエイトリフティング, サイクリング, etc…

競技経歴

- 2010年度東日本ウエイトリフティング学生個人選手権56kg級3位 (写真)
- 2015年早慶ウエイトリフティング定期戦56kg級優勝, etc…
- 慶應義塾体育会重量挙部(2008~2017) 主将 (2010-2011), コーチ (2012-2017)
- 日本ウエイトリフティング協会普及・国際委員会 2015~2017

自己紹介

研究経歴

2008~2012 慶應義塾大学物理学科
2012~2014 慶應義塾大学基礎理工学専攻修士課程
2014~2017 慶應義塾大学基礎理工学専攻博士課程
2015~2017 日本学術振興会特別研究員 (DC2)
2017~2019 理化学研究所　日本学術振興会特別研究員(PD)
2019~現在 高知大学 特任助教(新学術領域研究)

http://www.uaa.keio.ac.jp/event/result/201009182126.html

博士論文(主査: 大橋洋士教授)
“極低温フェルミ原子気体のBCS-BECクロスオーバー領域における熱力学的性質”

研究分野: 冷却原子気体, 中性子星, 超流動, 超伝導,ウエイトリフティングetc…
趣味: ~~ウエイトリフティング~~, サイクリング, etc…

競技経歴

- 2010年度東日本ウエイトリフティング学生個人選手権56kg級3位 (写真)
- 2015年早慶ウエイトリフティング定期戦56kg級優勝, etc…
- 慶應義塾体育会重量挙部(2008~2017) 主将 (2010-2011), コーチ (2012-2017)
- 日本ウエイトリフティング協会普及・国際委員会 2015~2017

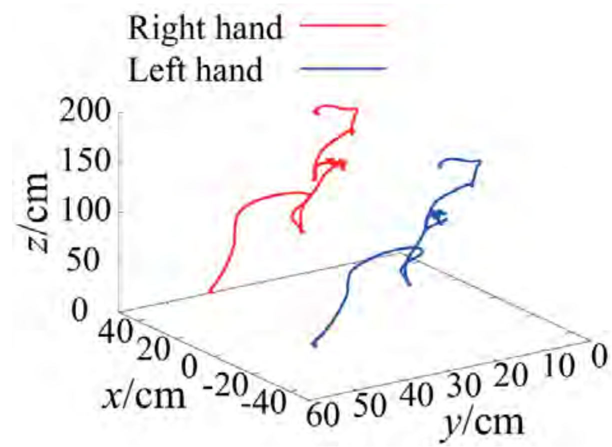
自己紹介

- Biomechanical properties of weightlifting motion

In collaboration with T. M. Doi, S. Koike, T. Hatsuda, and A. Nakamura

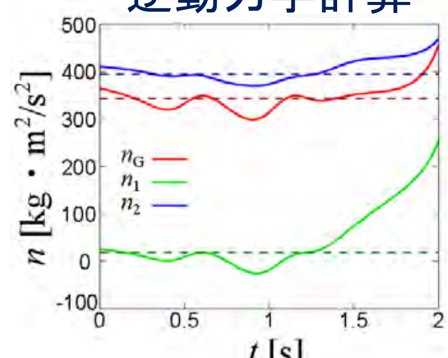
クリーンアンドジャーク(田島)

モーションキャプチャー測定@筑波大学

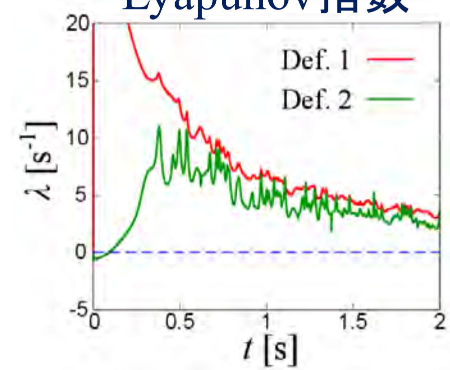


数値シミュレーション結果 (preliminary)

逆動力学計算



Lyapunov指数



自己紹介

理論(原子物性)、実験、被験者 (田島)

共同研究者(バイオメカニクス):小池関也(筑波)

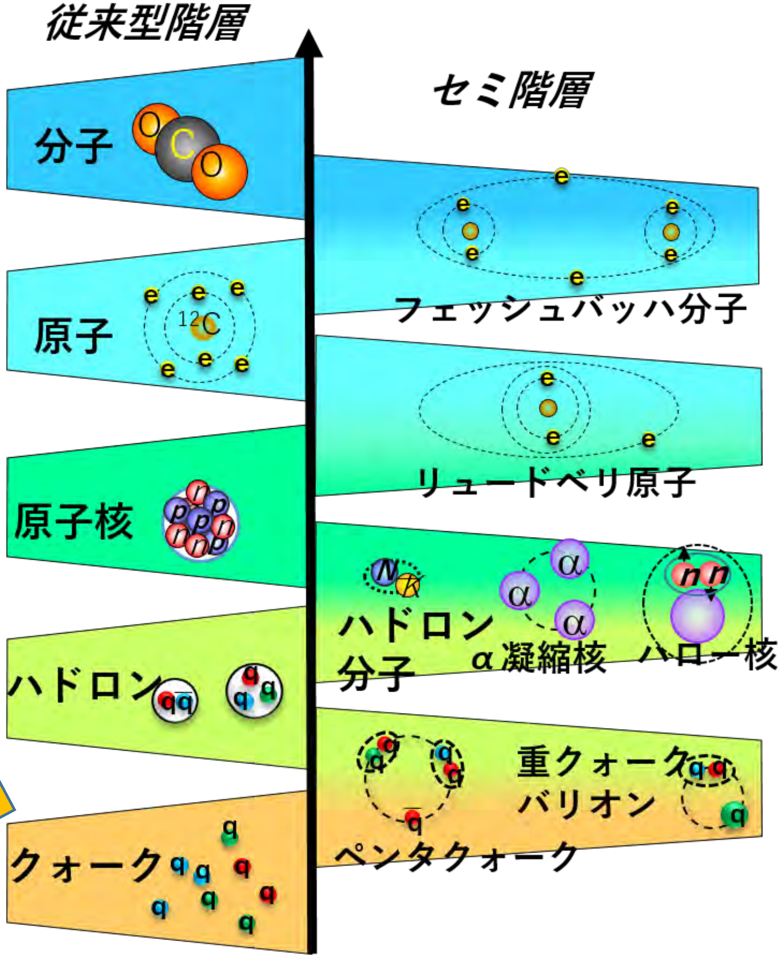
ウエイトリフター

iTHEMS

共同研究者(量子色力学):初田哲男(理研), 土居孝寛(理研), 中村純(理研,広大,FEFU)

We start from the QCD Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = \sum_{\psi} \left[i\bar{\psi}^j \gamma^\mu \left(D_\mu \psi\right)_j - m_\psi \bar{\psi}^j \psi_j \right] - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu}$$



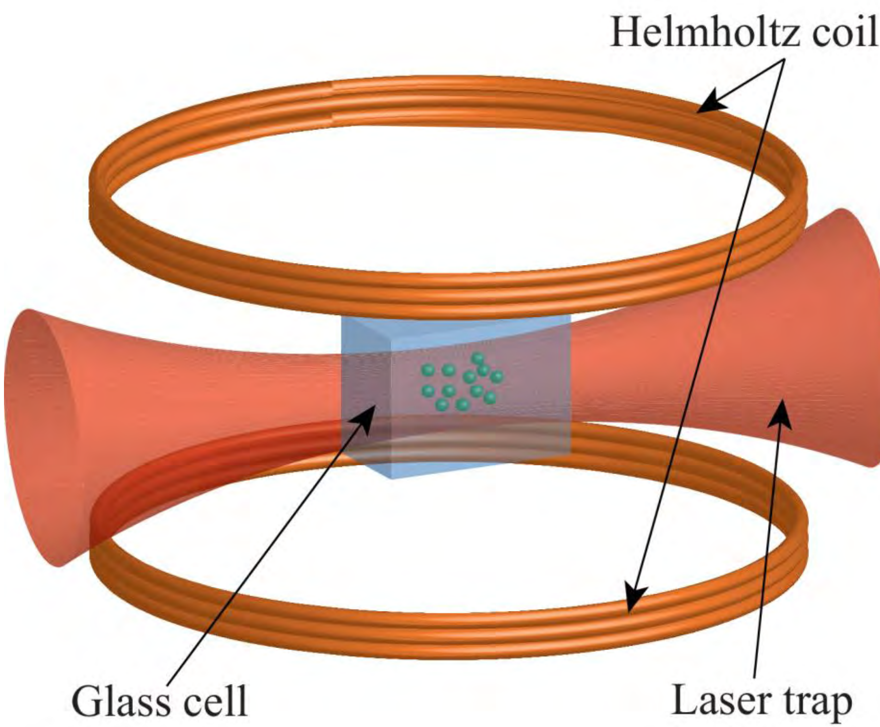
出典:新学術領域
「量子クラスターで読み解く物質の階層構造」より
http://be.nucl.ap.titech.ac.jp/cluster/

アウトライン

- イントロダクション
- 定式化
- 結果
- まとめ

冷却原子気体とは

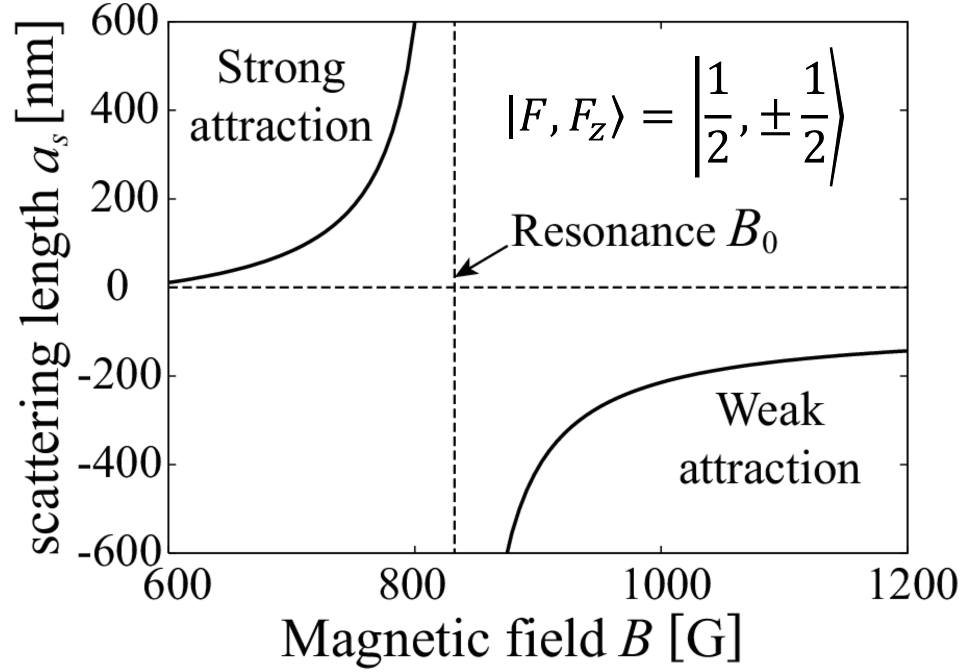
冷却原子気体実験の模式図



温度: $T \sim O(10^{1\sim2})$ nK

数密度: $n \sim O(10^{15})\ \mathrm{cm}^{-3}$

^{6}Liフェルミ原子気体のFeshbach共鳴

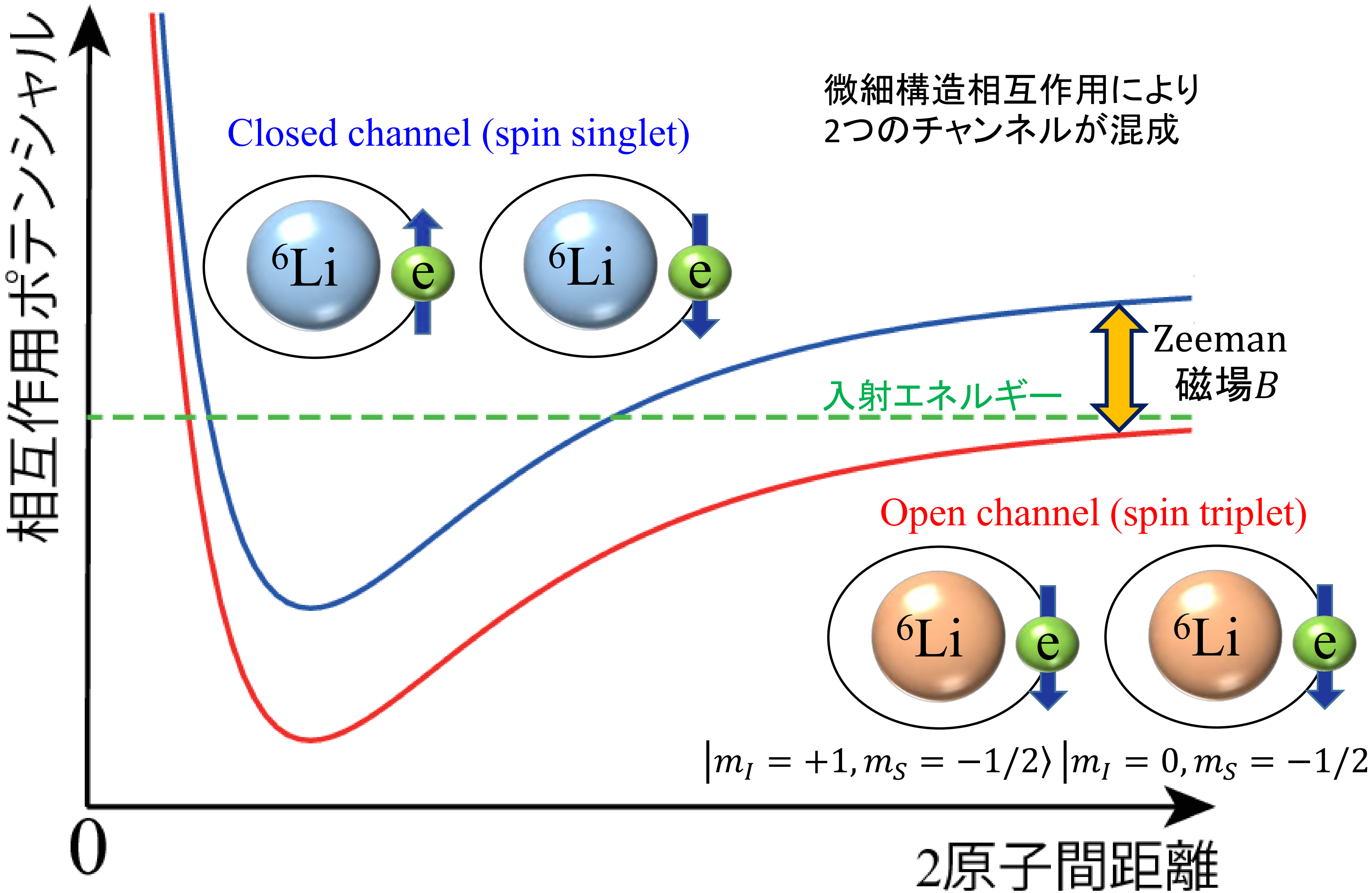


$$\boxed{a_s(B) = a_{\mathrm{bg}}\left(1 + \frac{W_{\mathrm{res}}}{B - B_0}\right)}$$

$a_{\mathrm{bg}} = -1582a_0, W_{\mathrm{res}} = 262.3\mathrm{G}, B_0 = 832.18\mathrm{G}$

G. Zürn, *et al.*, PRL **110**, 135301 (2013).

Feshbach共鳴による可変な相互作用

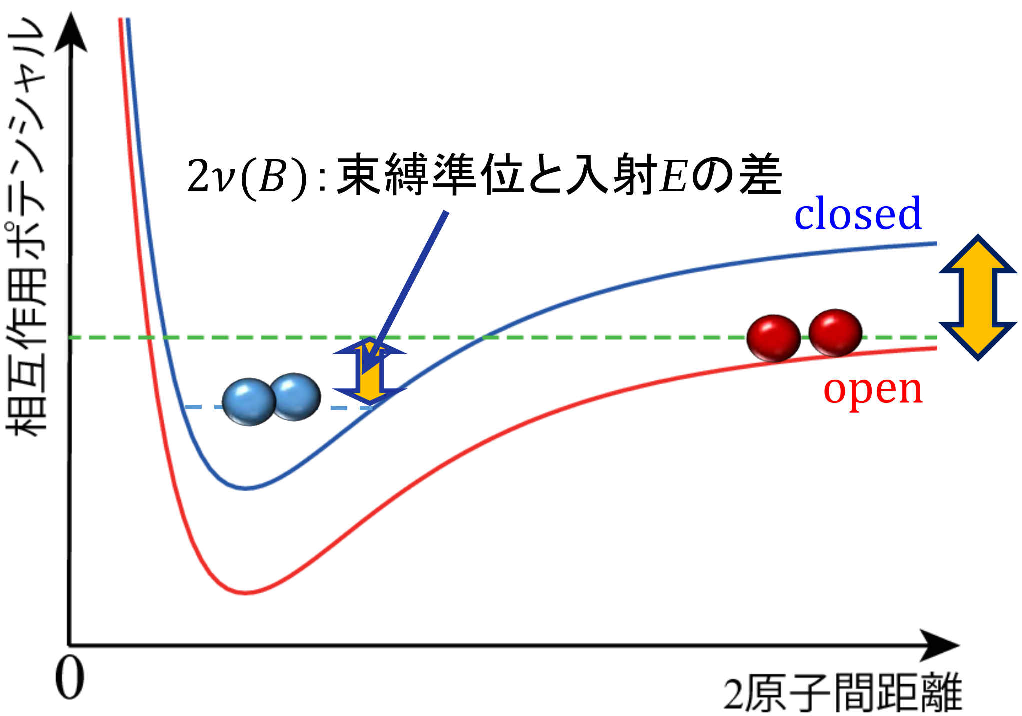


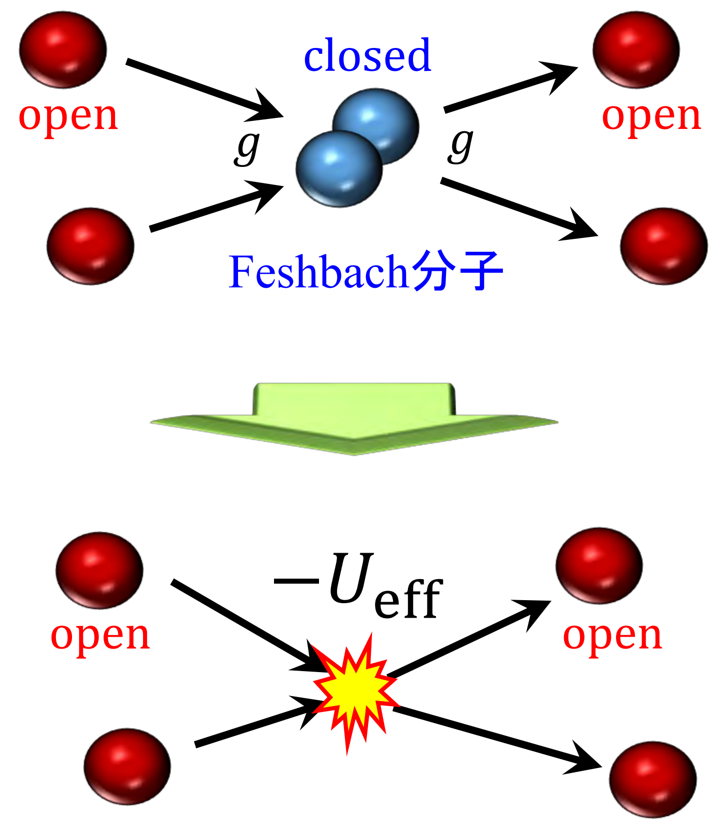
Feshbach共鳴による可変な相互作用

束縛分子を中間状態として相互作用
⇒エネルギー差(分子の組みやすさ)を磁場で変調

有効引力

$$\boxed{-U_{\text{eff}} \simeq -\frac{g^2}{2\nu(B)}}$$





フェルミ粒子系の基底状態

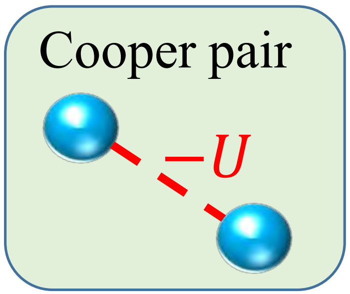
電子、中性子、陽子、クォーク、etc…

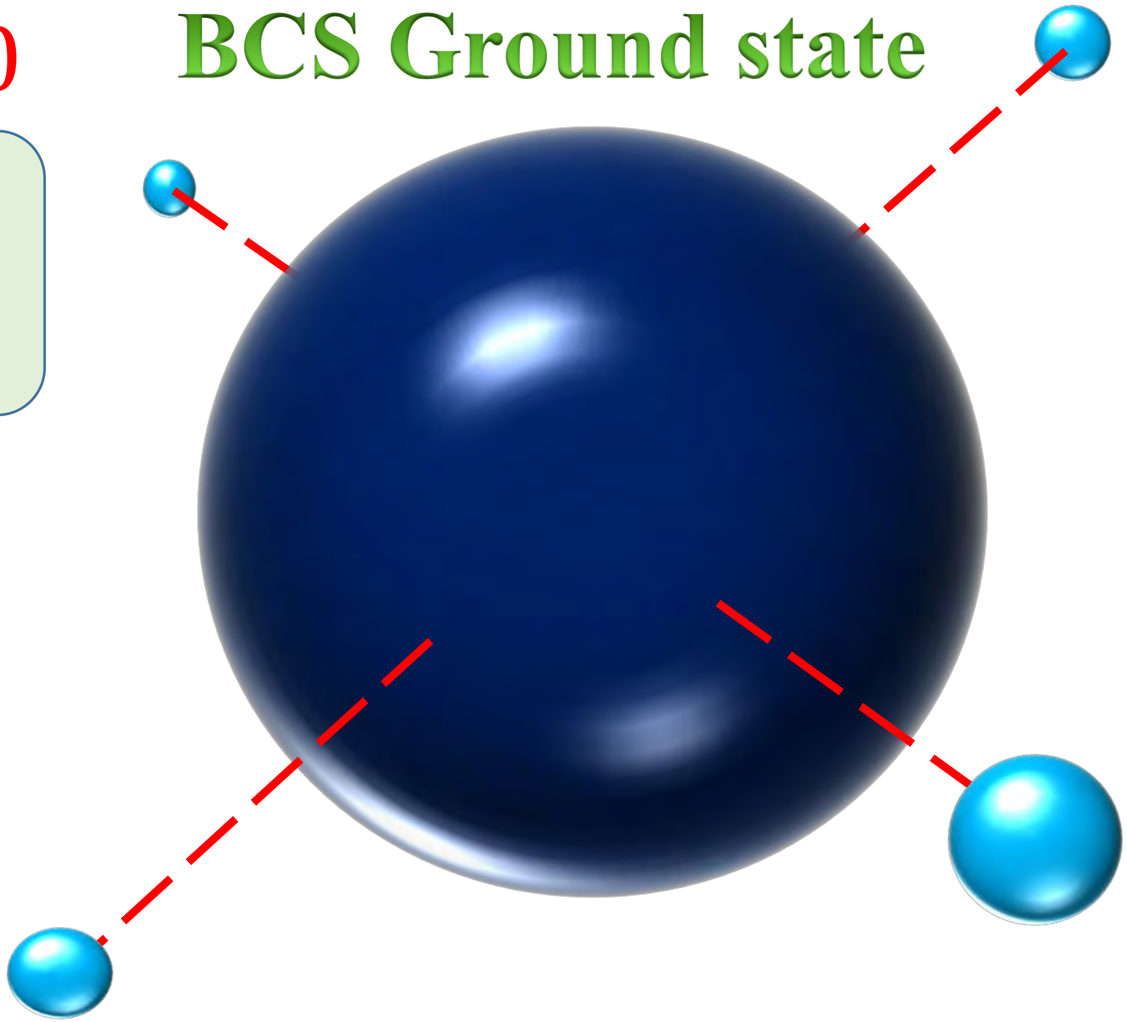
理想フェルミ気体

フェルミ粒子系の基底状態

引力相互作用

$-U \neq 0$



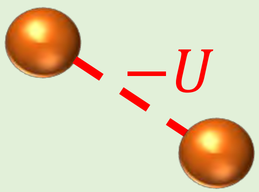


フェルミ粒子系の基底状態

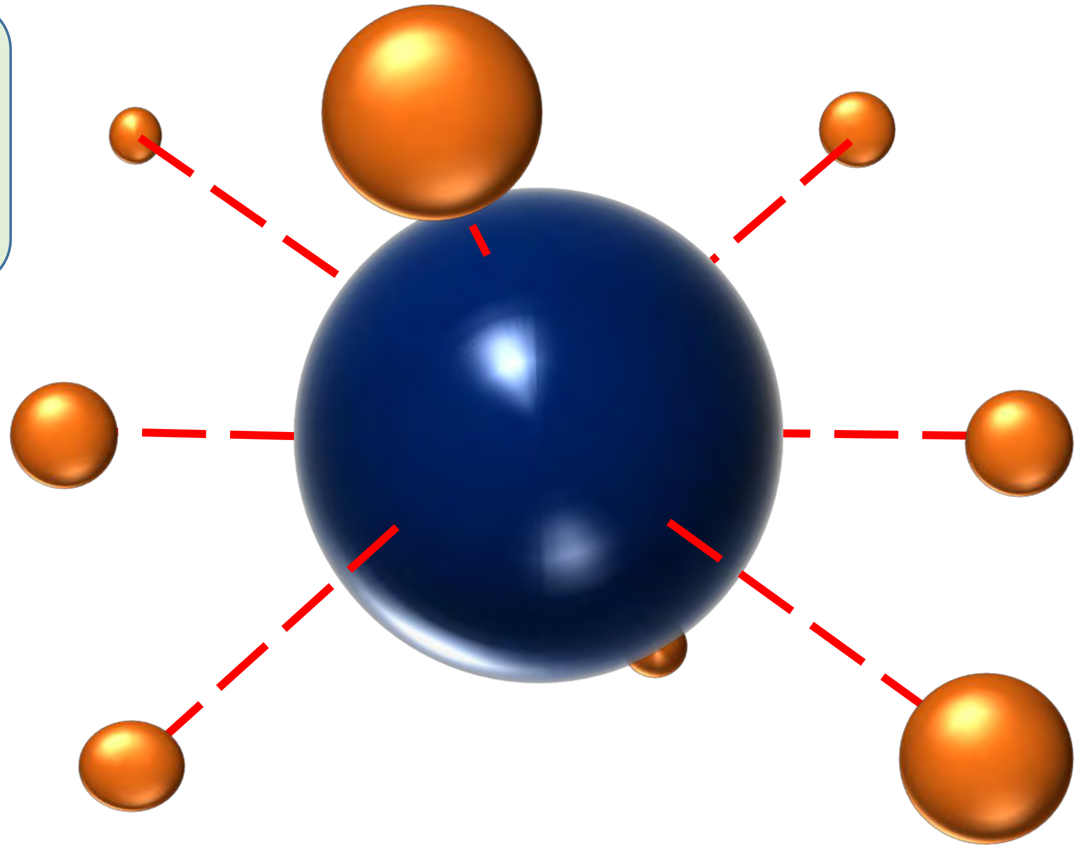
引力相互作用

$-U \neq 0$

Cooper pair



BCS Ground state

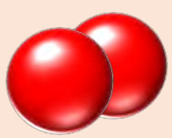


フェルミ粒子系の基底状態

引力相互作用

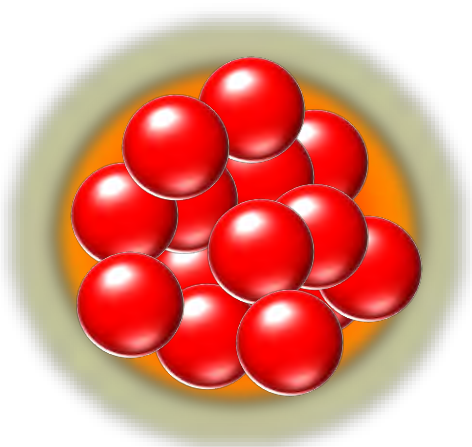
$-U \neq 0$

Molecule



Bose-Einstein Condensate

(BEC)

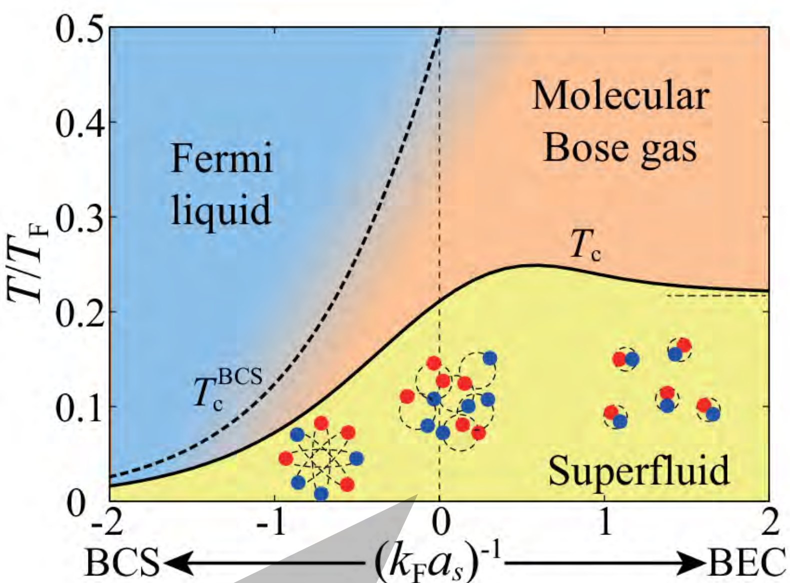


BCS-BECクロスオーバー

レビュー：Y. Ohashi, H. Tajima, and P. van Wyk, Prog. Part. Nucl. Phys. (in press)
https://doi.org/10.1016/j.ppnp.2019.103739

- 引力相互作用を強くしていくことで弱結合BCS超流動から束縛分子のBECへ連続的に変化

BCS-BECクロスオーバーの相図

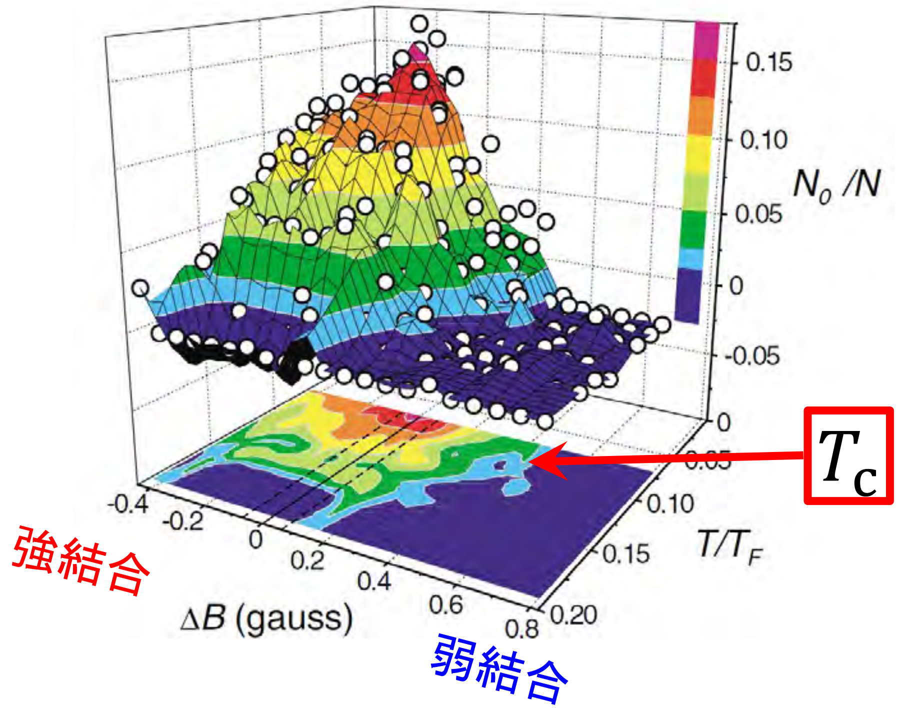


$a_s = -18.5\mathrm{fm}$

$(k_F a_s)^{-1} \simeq 0$

http://astro.riken.jp/wordpress/?page_id=1425

^{40}Kフェルミ原子気体の凝縮粒子数



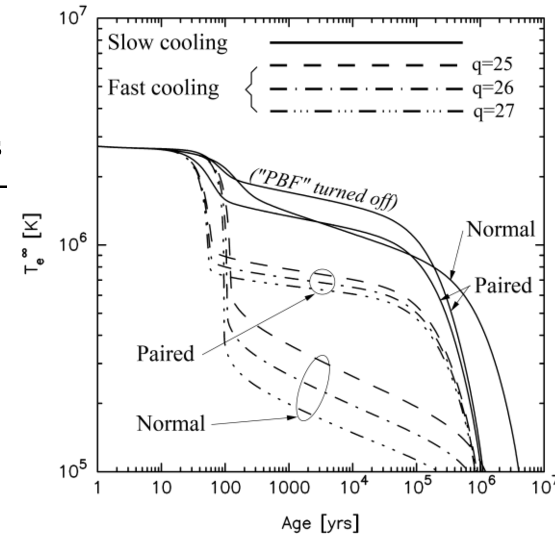
C. Regal, *et al.*, PRL **92**, 040403 (2004).

中性子星と超流動

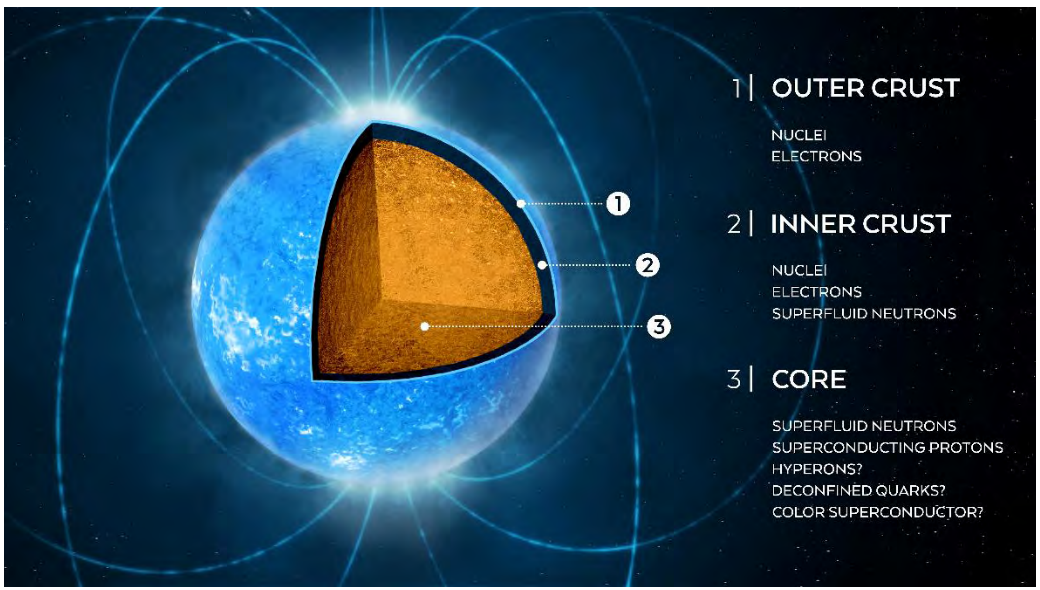
- 自然界唯一(?)の高密度核物質
- 核子超流動/超伝導が存在するかも

冷却曲線

D. Page, Fifty Years of Nuclear BCS 324-447 (2013).



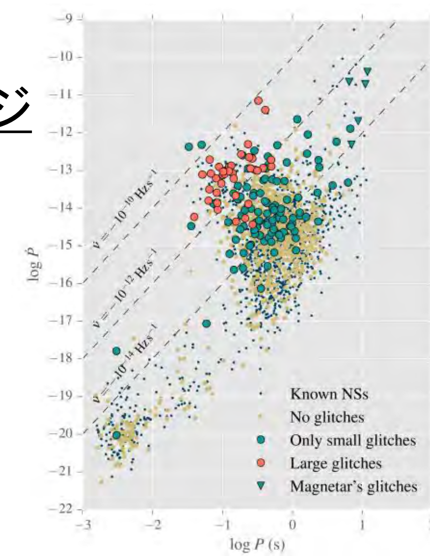
中性子星の内部構造



A. L. Watts, *et al.*, RMP **88**, 021001 (2016).

パルサーグリッジ

J. R. Fuentes, *et al.*, A&A 608, A131 (2017)



冷却原子気体と希薄中性子物質の類似性

- 希薄な中性子物質では超流動フェルミ原子気体と同様にs波散乱が支配的

散乱位相シフト (低エネルギー展開)

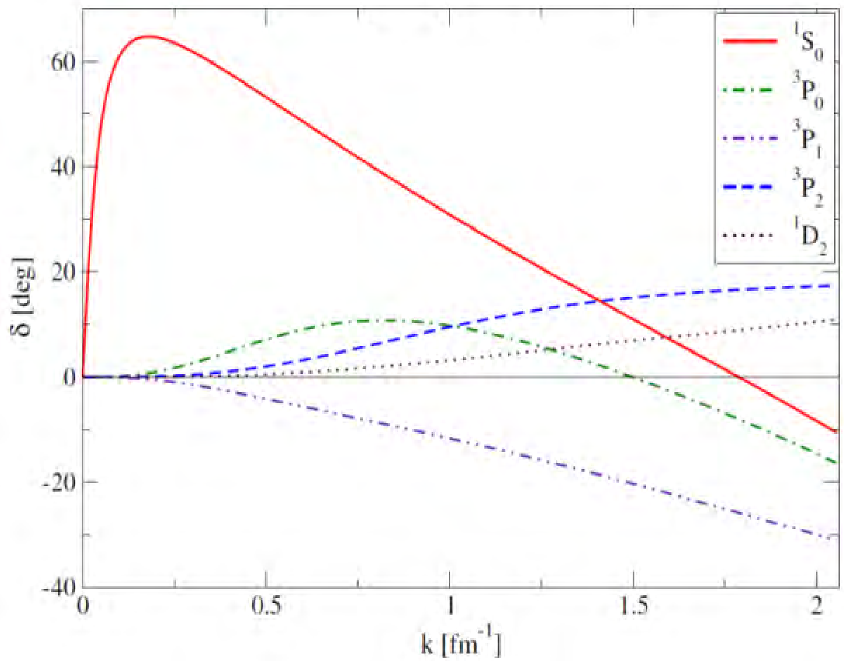
$$k\cot\delta_k = -\frac{1}{a_s} + \frac{1}{2}k^2 r_e$$

a_s: 散乱長

r_e: 有効距離

	Cold atom	Neutrons
a_s	$-\infty\sim\infty$	-18.5 fm
$r_{\rm eff}$	~0	2.8 fm
density	$\sim10^{15}$ cm^{-3}	~0.16 fm^{-3}
$(k_{\rm F}a_s)^{-1}$	$-\infty\sim\infty$	$-\infty\sim0$

核子-核子散乱の位相シフト



A. Gezerlis, *et al*, arXiv : 1406.6109v2

$*$ $k_{\rm F}$: フェルミ運動量

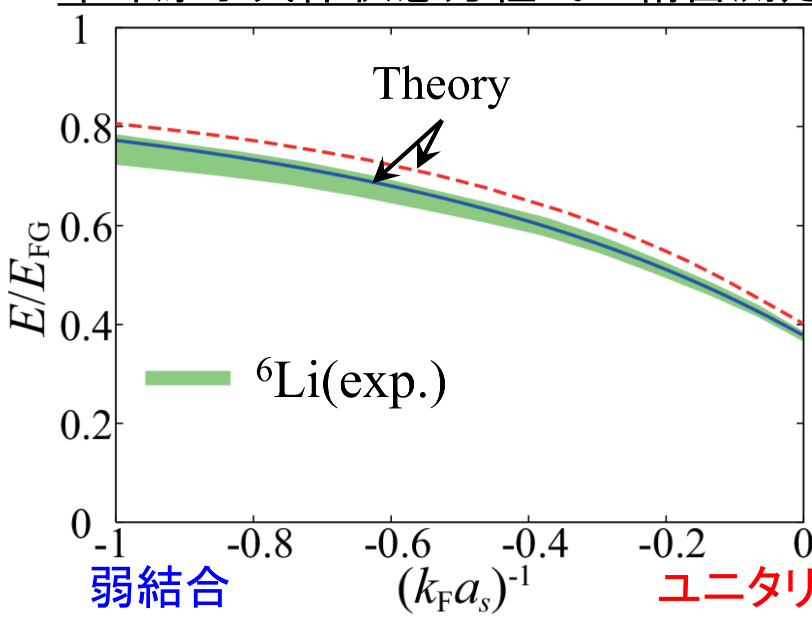
冷却原子気体と 希薄中性子物質の類似性

- 実際に状態方程式を比較してみると定量的に一致

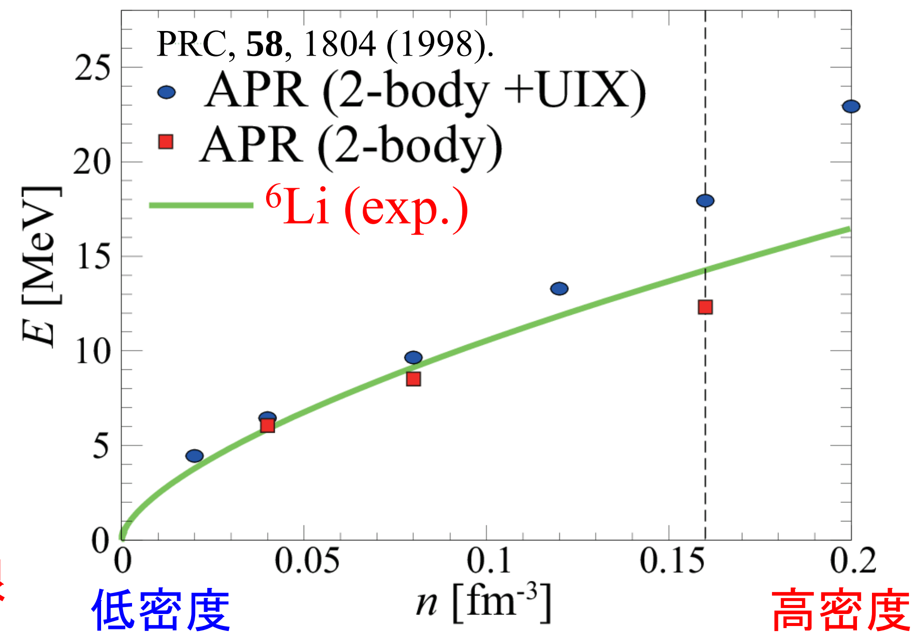
➡ 中性子物質の量子シミュレータが現実のものに

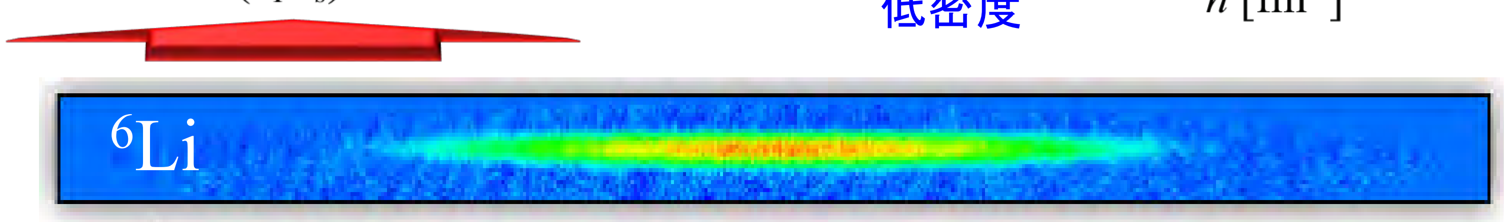
M. Horikoshi, M. Koashi, HT, Y. Ohashi, and M. Kuwata-Gonokami, PRX, **7**, 041004 (2017).

▸ 冷却原子気体状態方程式の精密測定



▸ 純中性子物質の状態方程式





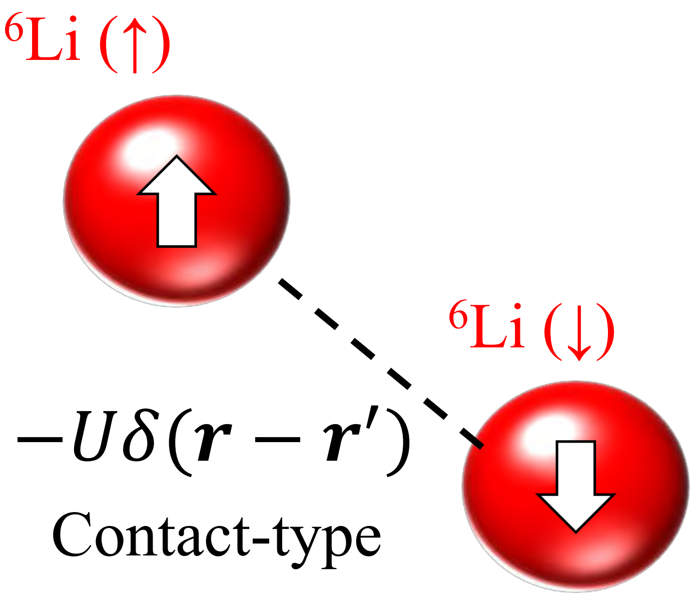
冷却原子気体と“中性子星物質”の違い

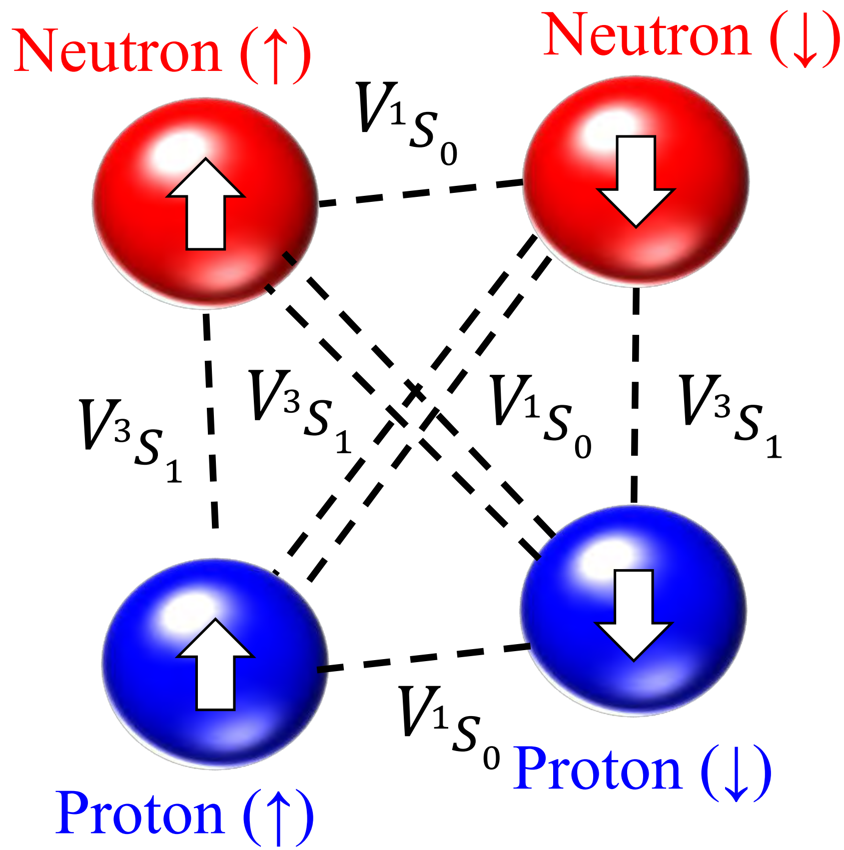
冷却フェルミ原子気体

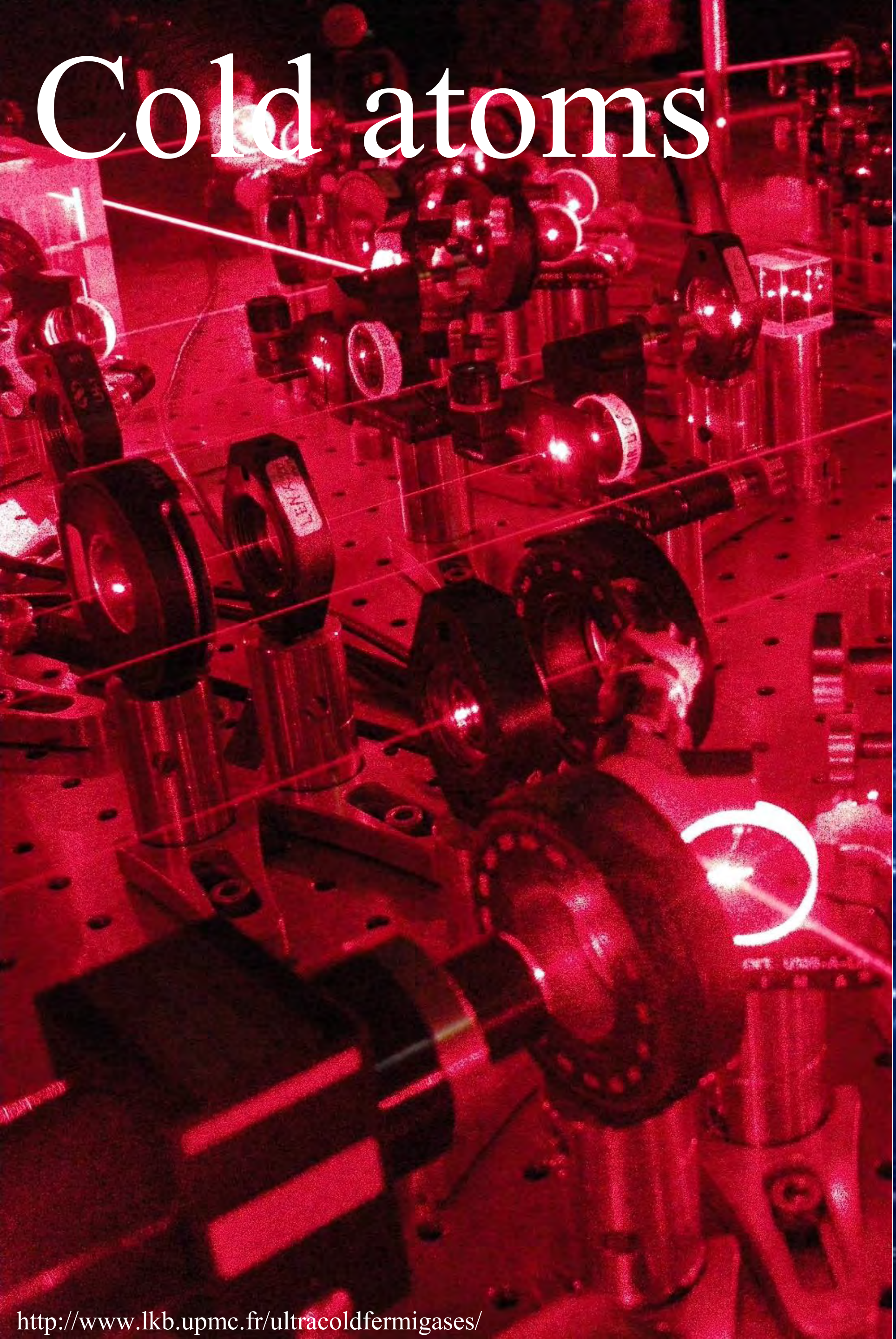
接触型相互作用でモデル化
2成分系で超流動が実現

非対称核物質

核力 (短距離力+長距離力)
中性子+陽子 (4成分)






Cold atoms
http://www.lkb.upmc.fr/ultracoldfermigases/


Neutron star
http://www.unlitworld.com/neutron-stars/

Cold atoms　Neutron star

本研究の目的

実験室で実現される冷却フェルミ原子気体と

宇宙遠方の中性子星内部における非対称核物質

を統一的に解析できる理論的枠組みを構築する

1. フェルミ原子気体のBCS-BECクロスオーバー理論
2. フェルミ原子気体から希薄中性子物質へ
3. 希薄中性子物質から中性子星物質へ

http://www.lkb.upmc.fr/ultracoldfermigases/

http://www.unlitworld.com/neutron-stars/

アウトライン

- イントロダクション
- 定式化
- 結果
- まとめ

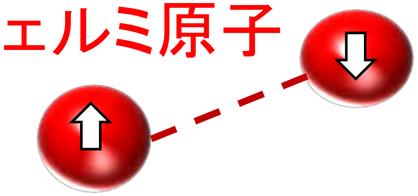
フェルミ原子気体のハミルトニアン

$$H = \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow}\sum_{\boldsymbol{k}} \xi^{\mathrm{I}}_{\boldsymbol{k},\sigma}\, c^{\mathrm{I}\,\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}\, c^{\mathrm{I}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$$

S波相互作用

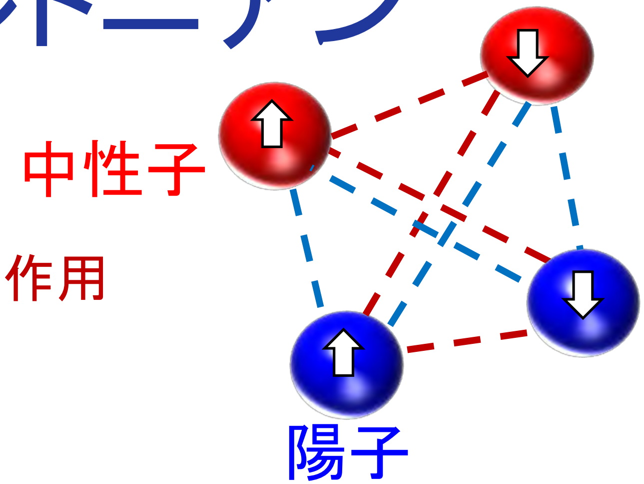
$$+ \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}} V_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\, c^{\mathrm{n}\,\dagger}_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\uparrow}\, c^{\mathrm{n}\,\dagger}_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\downarrow}\, c^{\mathrm{n}}_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\downarrow}\, c^{\mathrm{n}}_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\uparrow}$$

フェルミ原子



- 運動エネルギー: $\xi^{\mathrm{I}}_{\boldsymbol{k},\sigma} = \dfrac{k^2}{2m_{\mathrm{A}}} - \mu_{\mathrm{I}}$
- 擬スピン: $\sigma = \uparrow,\downarrow$
- 原子質量: m_{A}
- 化学ポテンシャル: μ_{I}
- 消滅演算子: $c^{\mathrm{I}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$
- 相互作用ポテンシャル: $V_{\mathrm{S,T}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$

非対称核物質のハミルトニアン



$$H=\sum_{\mathrm{I=n,p}}\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow}\sum_{\boldsymbol{k}}\xi^{\mathrm{I}}_{\boldsymbol{k},\sigma}c^{\mathrm{I}\dagger}_{\boldsymbol{k},\sigma}c^{\mathrm{I}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$$

$^1S_0$ spin-singlet 相互作用

$$+\sum_{\mathrm{I=n,p}}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}}V_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\,c^{\mathrm{I}\dagger}_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\uparrow}c^{\mathrm{I}\dagger}_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\downarrow}c^{\mathrm{I}}_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\downarrow}c^{\mathrm{I}}_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\uparrow}$$

$$+\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}}\frac{V_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')}{2}\left(c^{\mathrm{n}\dagger}_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\uparrow}c^{\mathrm{p}\dagger}_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\downarrow}+c^{\mathrm{p}\dagger}_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\uparrow}c^{\mathrm{n}\dagger}_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\downarrow}\right)\left(c^{\mathrm{p}}_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\downarrow}c^{\mathrm{n}}_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\uparrow}+c^{\mathrm{n}}_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\downarrow}c^{\mathrm{p}}_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\uparrow}\right)$$

$^3S_1$ spin-triplet 相互作用

$$+\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}}\frac{V_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')}{2}\left(c^{\mathrm{n}\dagger}_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\uparrow}c^{\mathrm{p}\dagger}_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\downarrow}-c^{\mathrm{p}\dagger}_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\uparrow}c^{\mathrm{n}\dagger}_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\downarrow}\right)\left(c^{\mathrm{p}}_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\downarrow}c^{\mathrm{n}}_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\uparrow}-c^{\mathrm{n}}_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\downarrow}c^{\mathrm{p}}_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\uparrow}\right)$$

$$+\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow}\sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}}V_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\,c^{\mathrm{n}\dagger}_{\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\sigma}c^{\mathrm{p}\dagger}_{-\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\sigma}c^{\mathrm{p}}_{-\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\sigma}c^{\mathrm{n}}_{\boldsymbol{k}'+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\sigma}$$

*I = n (neutron), p (proton)

- 運動エネルギー: $\xi^{\mathrm{I}}_{\boldsymbol{k},\sigma}=\dfrac{k^2}{2m_{\mathrm{N}}}-\mu_{\mathrm{I}}$
- 核子スピン: $\sigma=\uparrow,\downarrow$
- 核子質量: $m_{\mathrm{N}}=939\mathrm{MeV}$
- 化学ポテンシャル: μ_{I}
- 消滅演算子: $c^{\mathrm{I}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$
- 相互作用ポテンシャル: $V_{\mathrm{S,T}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$

相互作用ポテンシャル

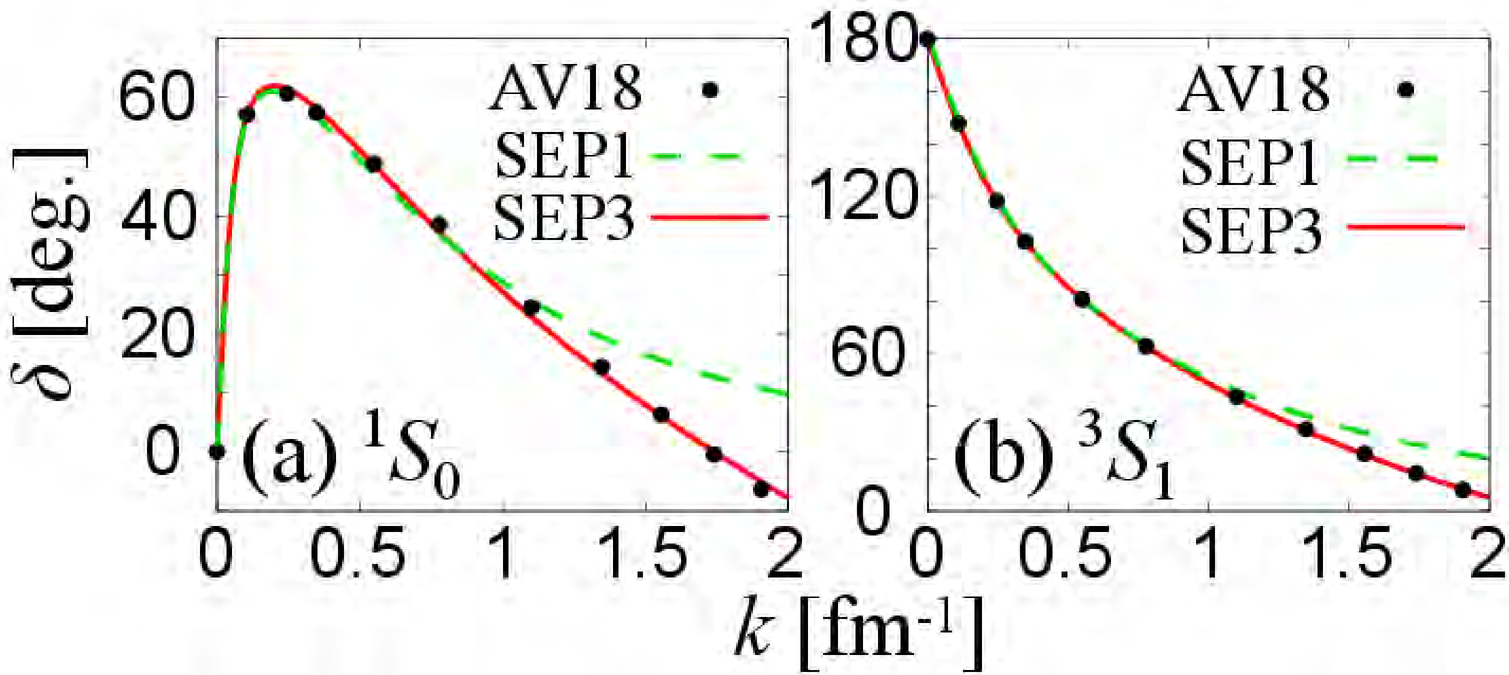
- Separable multi-rank ポテンシャル (SEP n_{rank})

$$V(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = \sum_{n=1}^{n_{\mathrm{rank}}} \eta_n \gamma_n(\boldsymbol{k})\gamma_n(\boldsymbol{k}') = \boldsymbol{\gamma}^t(\boldsymbol{k})\hat{\eta}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{k}')$$

$\gamma_n(\boldsymbol{k}) = \frac{u_n}{k^2+\Lambda_n^2}$: form factor $\quad \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\boldsymbol{k}) \\ \gamma_2(\boldsymbol{k}) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \hat{\eta} = \mathrm{diag}(\eta_1, \eta_2, \ldots)$, $\eta_n = \pm 1$

- S波の位相シフト

AV18: PRC, **51** 38 (1995).



Nozières-Schmitt-Rink理論

P. Van Wyk, HT, D. Inotani, A. Ohnishi, and Y. Ohashi, PRA, **97**, 013601 (2018).

BCS-BECクロスオーバーに対し高い定量性をもつ

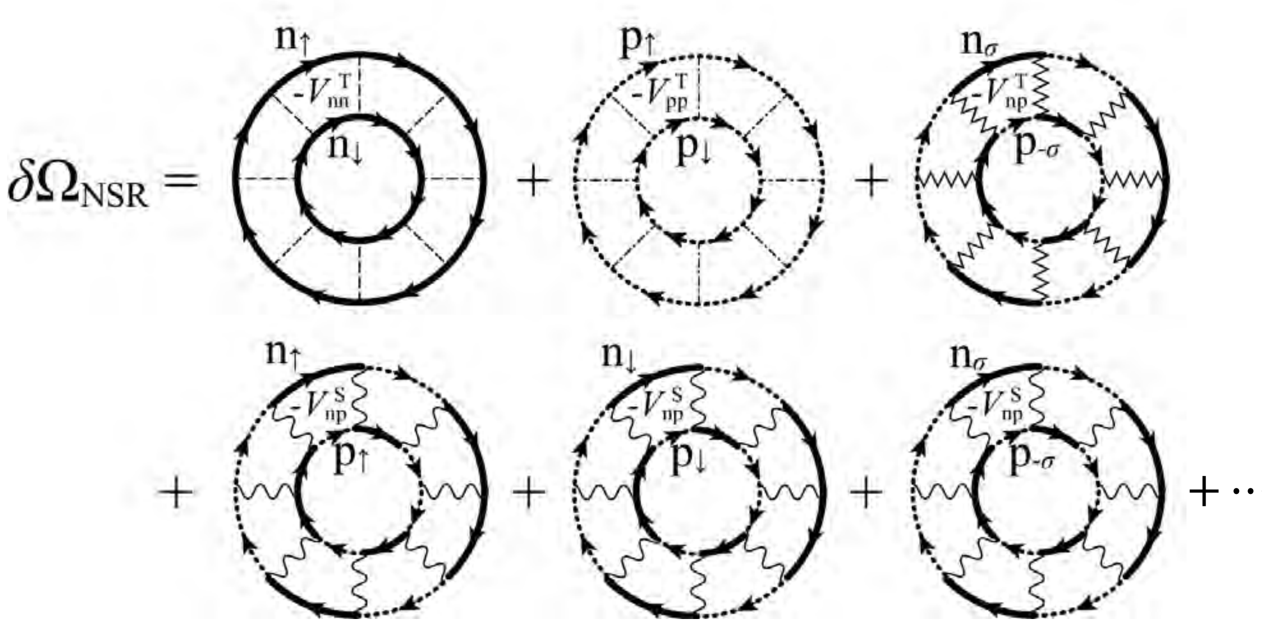
- 熱力学ポテンシャル:

$G_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}}$

$G_{\mathrm{p}}^{\mathrm{H}}$

$$\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega_{\mathrm{NSR}}$$

*Ω_0: 平均場項



$G_{\mathrm{n,p}}^{\mathrm{H}}$: Hartree自己エネルギーを含む核子Green関数

数値計算フロー

陽子の割合 $Y_{\rm p}$,
密度 ρ, 相互作用 V

超流動相転移温度 $T_{\rm c}$,
化学ポテンシャル $\mu_{\rm n}, \mu_{\rm p}$

● 粒子数方程式:

$$\rho = \rho_{\rm n} + \rho_{\rm p} \equiv \rho_{\rm n} + Y_{\rm p}\rho$$

中性子密度

$$\boxed{\rho_{\rm n} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_{\rm n}}}$$

陽子密度

$$\boxed{\rho_{\rm p} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_{\rm p}}}$$

● Thoulessの判定条件 [$T_{\rm c}$の決定方法]:

$$\boxed{\det\left[1 + \hat{\eta}\hat{\Pi}^{xy}(\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}, i\nu_l = 0)\right] = 0}$$

$\hat{\Pi}^{xy}(0,0)$: nucleon pair propagator with zero momentum and energy

アウトライン

- イントロダクション
- 定式化
- 結果
- まとめ

フェルミ原子気体の定量的解析

- ユニタリーフェルミ気体 ≃ 希薄中性子物質

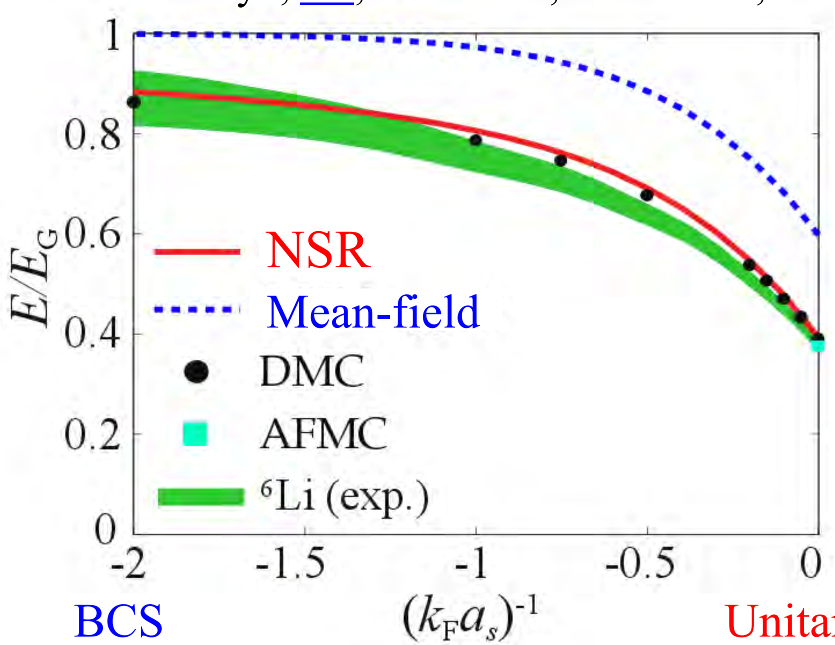
$Y_\mathrm{p} = 0$ (2成分フェルミ粒子系)

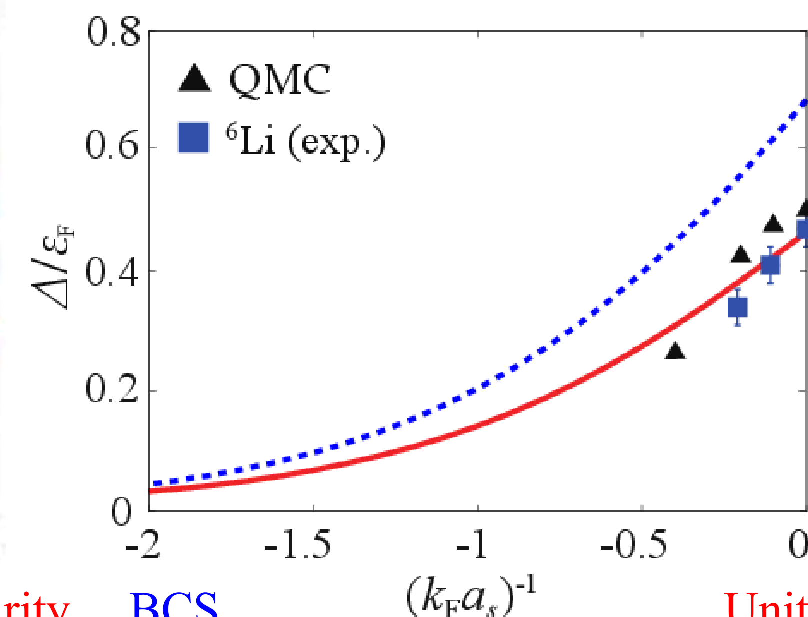
- 接触型ゼロレンジ相互作用

$$V(k,k') = -\frac{u_1}{k^2+\Lambda_1^2}\frac{u_1}{k'^2+\Lambda_1^2} \quad (r_\mathrm{e} \to 0, \quad \Lambda_1 \to \infty)$$

- 絶対零度近傍の状態方程式と超流動ギャップ

P. Van Wyk, HT, D. Inotani, A. Ohnishi, and Y. Ohashi, PRA, **97**, 013601 (2018).



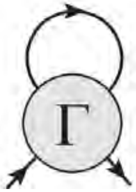


BCS Unitarity BCS Unitarity

さらに高次補正を加えると

Nozières Schmitt-Rink

$\Sigma_{\mathrm{NSR}} =$



$\mu \simeq \varepsilon_{\mathrm{F}} - \Gamma_{\mathrm{eff}}\rho_0$

ρ_0 : mean field density

Extended *T*-matrix approx.

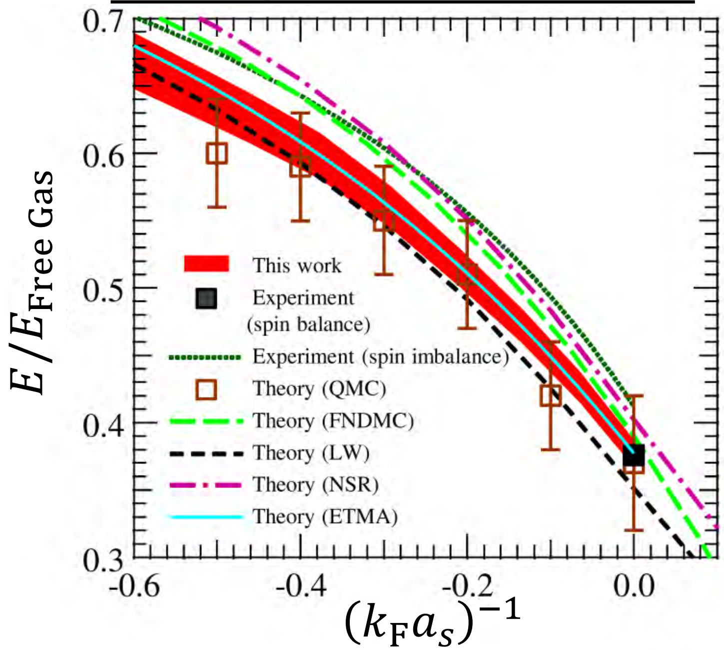
$\Sigma_{\mathrm{ETMA}} =$

$\mu \simeq \varepsilon_{\mathrm{F}} - \Gamma_{\mathrm{eff}}\rho$

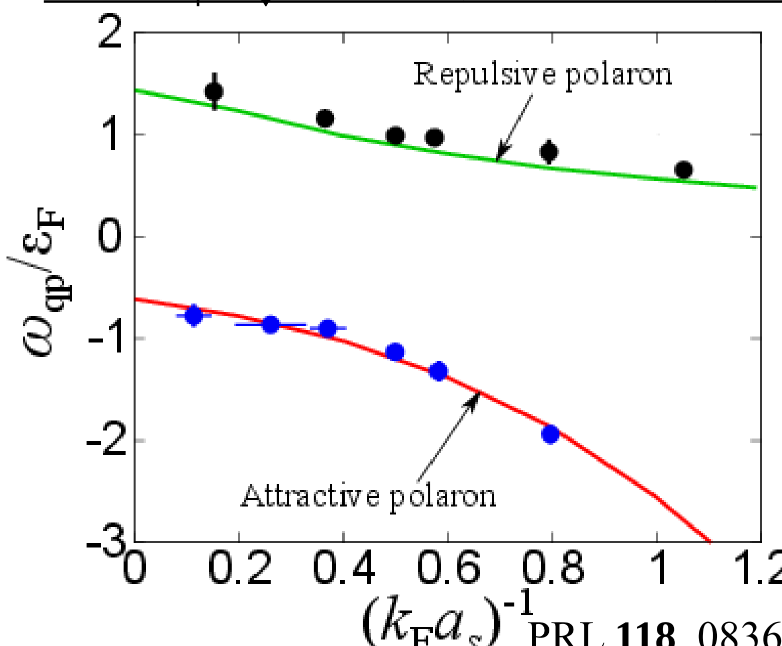
Theory: HT, *et al*., PRA, **95**, 043625 (2017); NJP **20**, 073048 (2018).

Experiment: M. Horikoshi, M. Koashi, HT, Y. Ohashi, and M. Kuwata-Gonokami, PRX, **7**, 041004 (2017).

絶対零度近傍の EOS



スピン↑と↓の粒子数が異なる場合



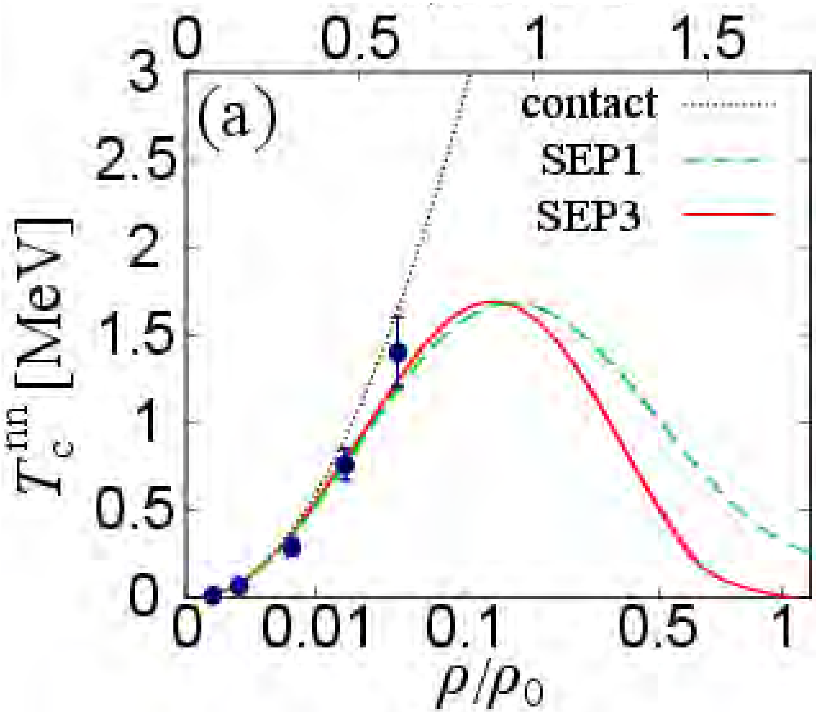
PRL **118**, 083602 (2017).

冷却原子気体から中性子物質へ

- 中性子物質の$^1S_0$超流動相転移温度

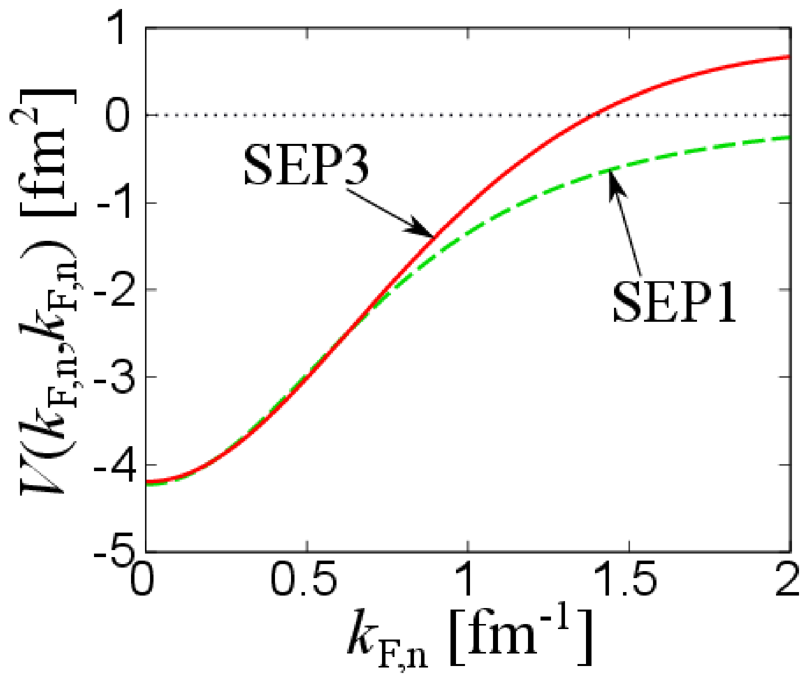
*"contact" は冷却原子気体に対応

中性子のフェルミ運動量 $k_{F,n}$ [fm^{-1}]



- $k = k_{F,n}$における相互作用

密度が上昇するにつれ$k = k_{F,n}$
における引力が弱まる



本研究　SEP1: Single-rank potential (finite effective range)
SEP3: Multi-rank potential (effective range + short-range repulsion)

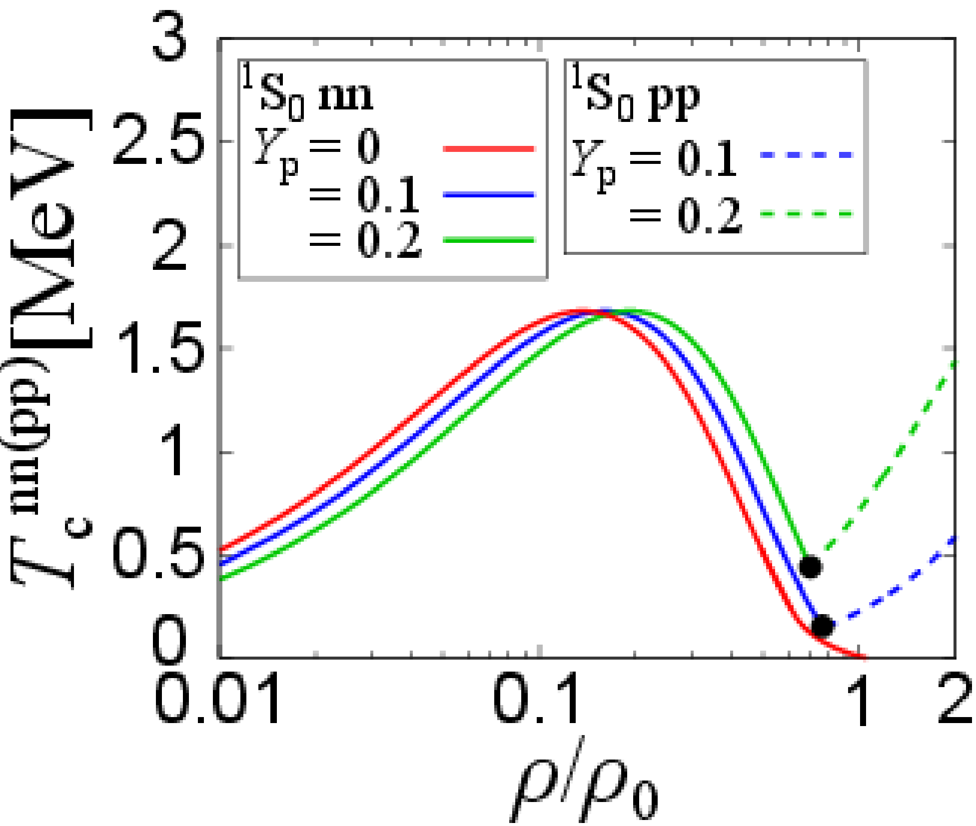
先行研究　QMC: T. Abe and R. Seki, PRC **79**, 054003 (2009).

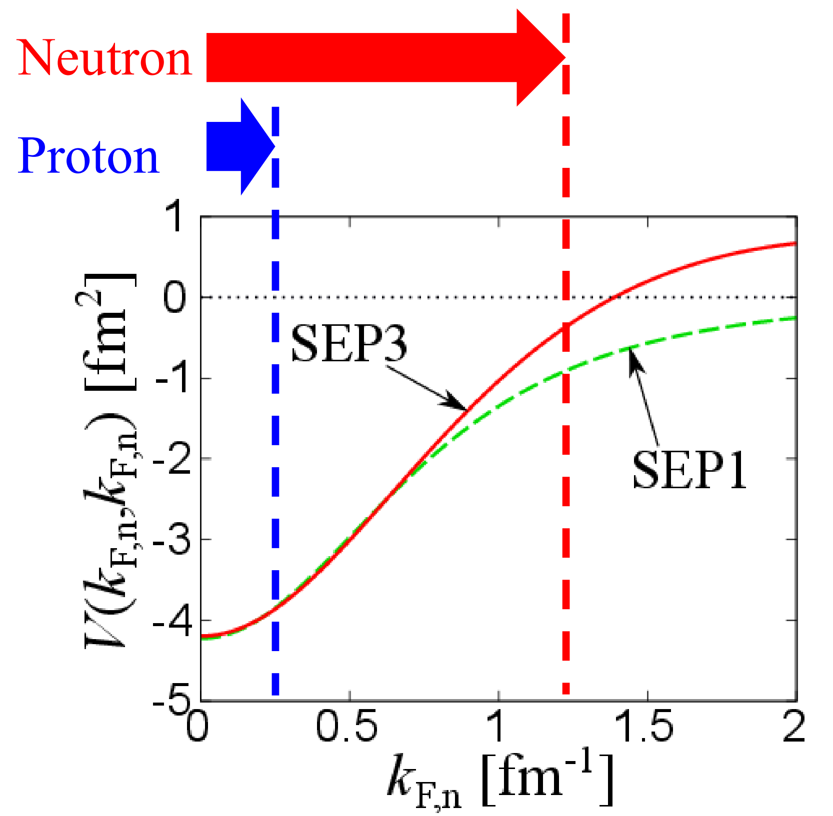
希薄中性子物質から非対称核物質へ

◉ ${}^1S_0$中性子超流動転移温度T_c^{nn}は、陽子の混在によりピークがシフト
◉フェルミ運動量の違いにより${}^1S_0$陽子超伝導が高密度側で支配的に

- **非対称核物質の超流動相転移**

$$k_{\mathrm{F,p}} = \left(3\pi^2\rho_{\mathrm{n}}\frac{Y_{\mathrm{p}}}{1-Y_{\mathrm{p}}}\right)^{\frac{1}{3}} \equiv \left(\frac{Y_{\mathrm{p}}}{1-Y_{\mathrm{p}}}\right)^{\frac{1}{3}} k_{\mathrm{F,n}}$$

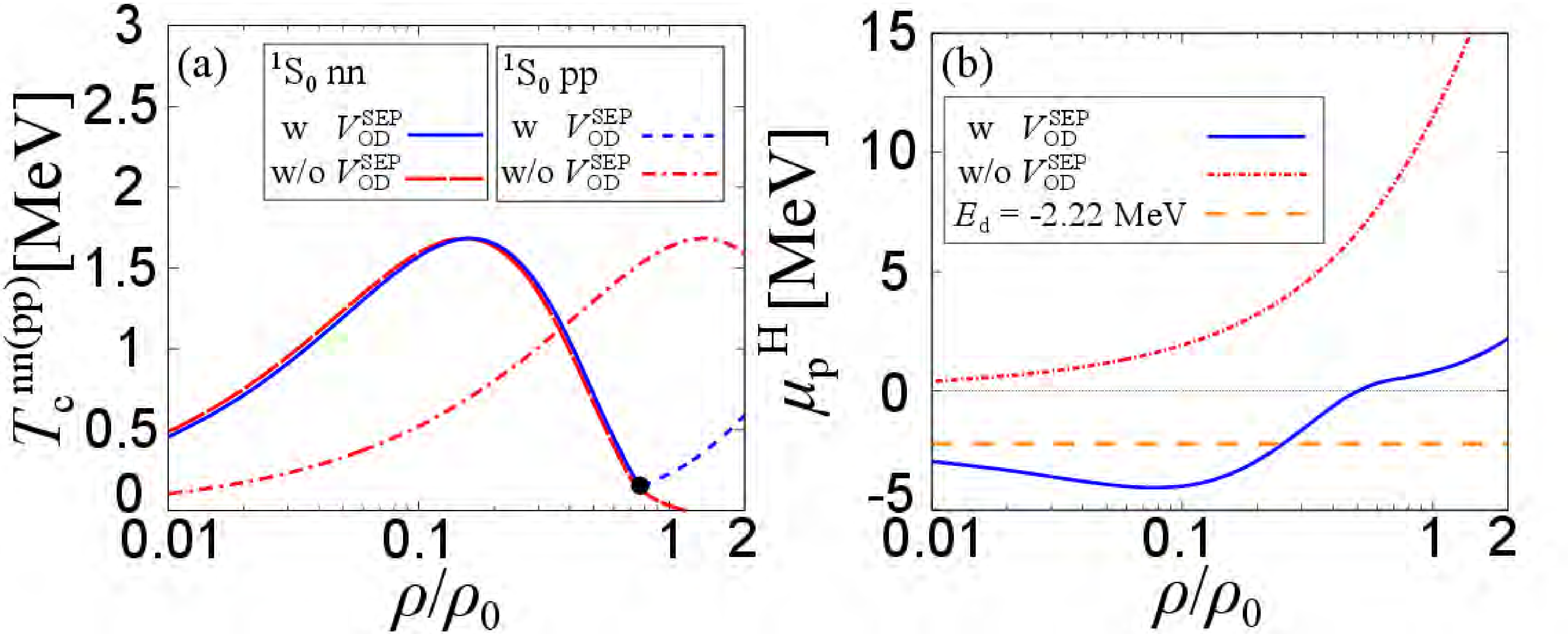




陽子-中性子対形成揺らぎの効果

- <u>フル計算と陽子-中性子相互作用を除いた結果の比較</u>

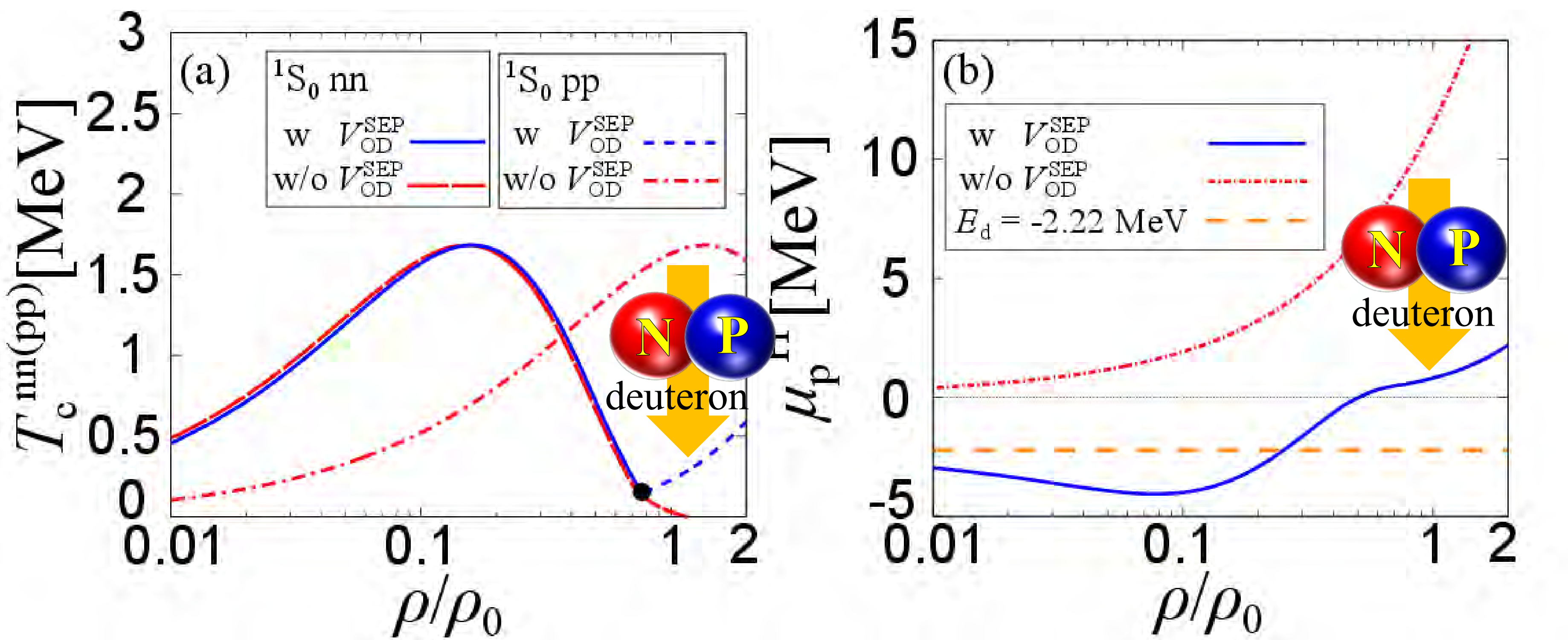
◉ 陽子の熱力学的性質は強い陽子-中性子間相互作用に大きく影響される
◉ 陽子-中性子対形成揺らぎ(媒質中の重陽子)により$^1S_0$陽子超伝導は抑制



陽子-中性子対形成揺らぎの効果

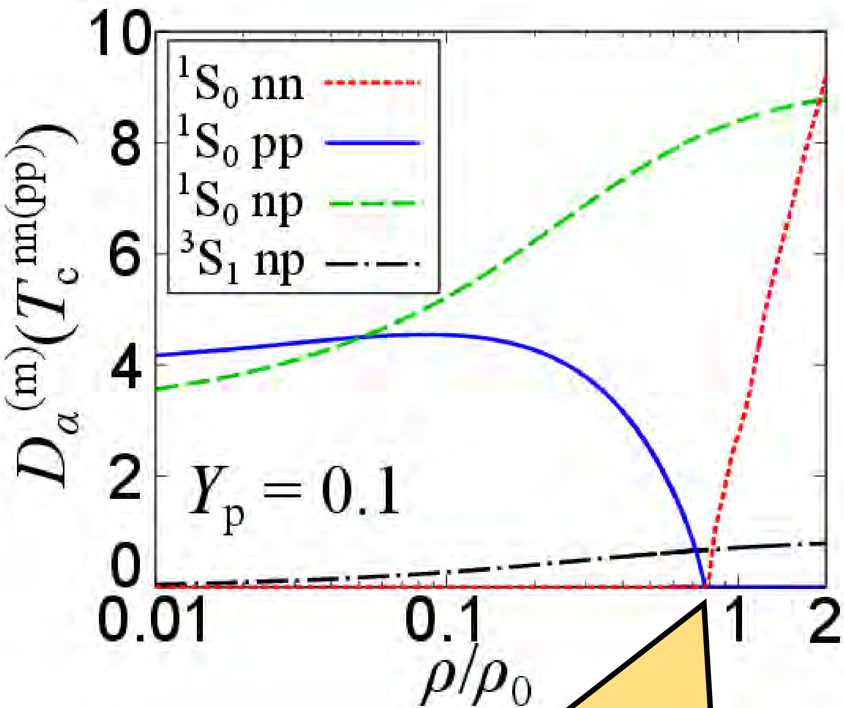
- フル計算と陽子-中性子相互作用を除いた結果の比較

◉ 陽子の熱力学的性質は強い陽子-中性子間相互作用に大きく影響される
◉ 陽子-中性子対形成揺らぎ(媒質中の重陽子)により$^1S_0$陽子超伝導は抑制



NGモードのギャップとFFLO的対相関

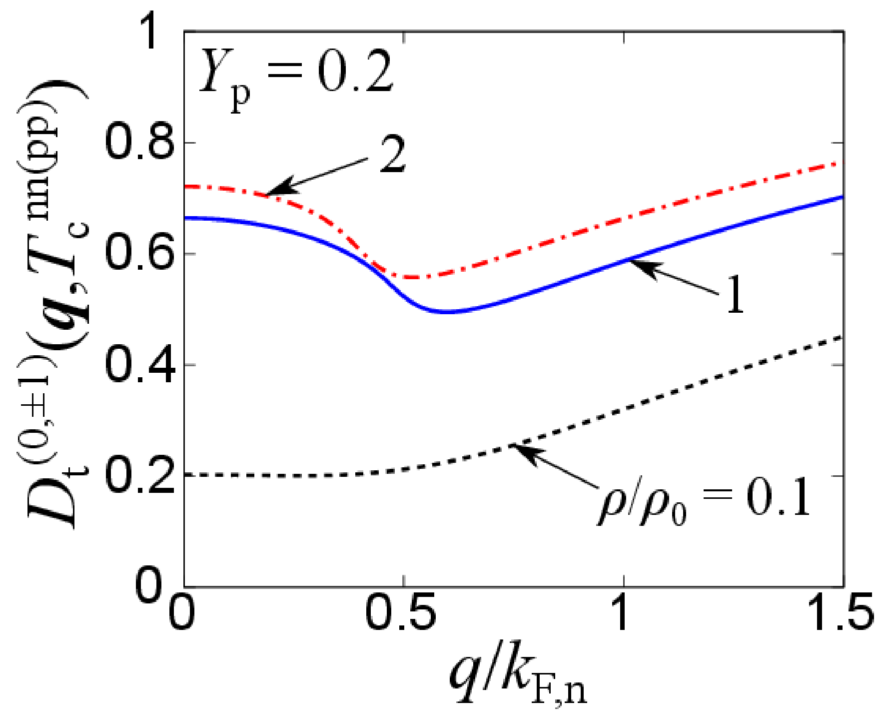
- T_c上での各NGモードのギャップ

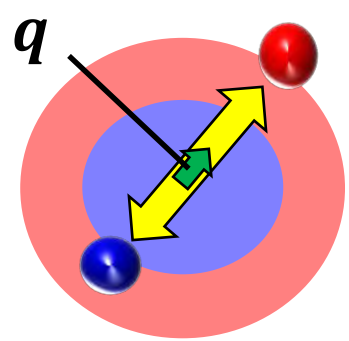


中性子超流動から陽子超伝導

*正確には多体T行列のdeterminant

- 非対称核物質でのFFLO的対相関





FFLO: 有限の重心運動量$\boldsymbol{q}$をもったCooper対形成

アウトライン

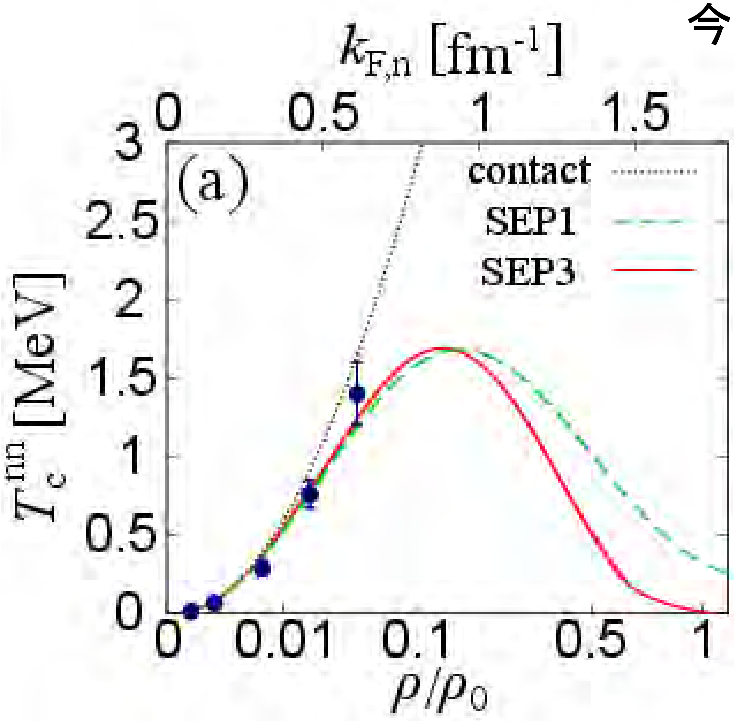
- イントロダクション
- 定式化
- 結果
- まとめ

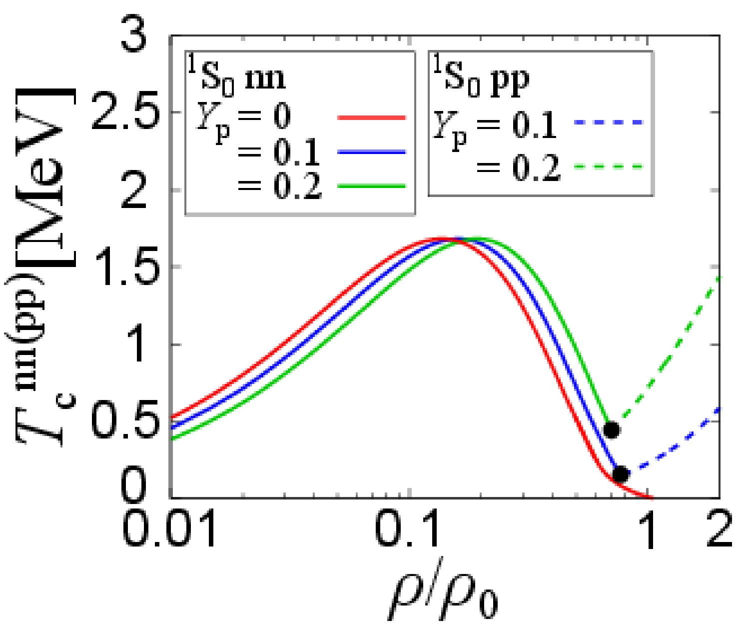
まとめ

地上実験で実現される冷却原子気体のBCS-BECクロスオーバーを定量的に記述できる理論を拡張することで、中性子星内部の非対称核物質をも統一的に扱えるような多体理論を構築した。

非対称核物質中の超流動相転移を解析し、核子間相互作用による強結合効果を明らかにした。特に、冷却問題にも重要な陽子超伝導は陽子-中性子対形成揺らぎにより抑制されることを示した。

今後の課題: 媒質中のクラスター, 3P2超流動, etc..

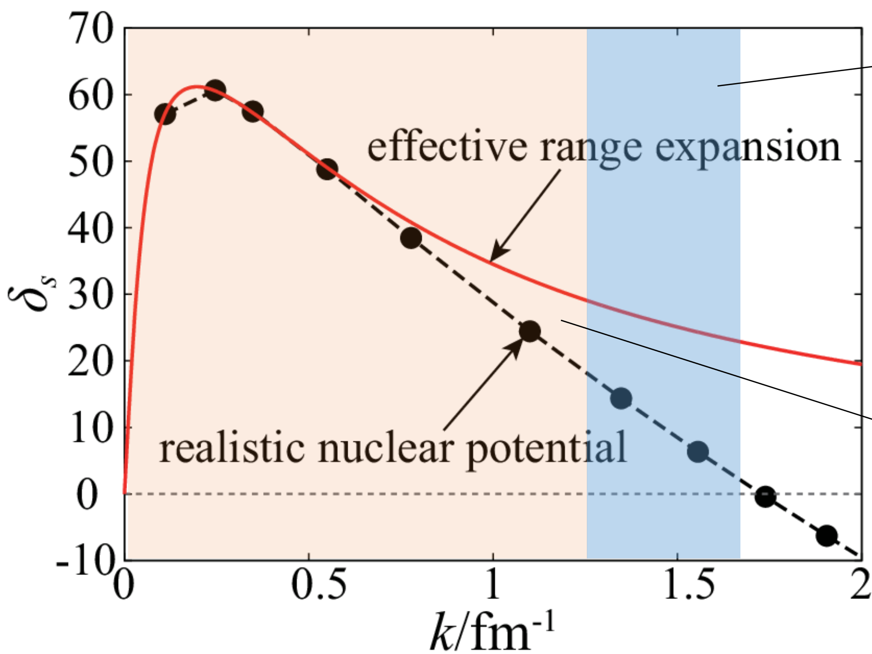


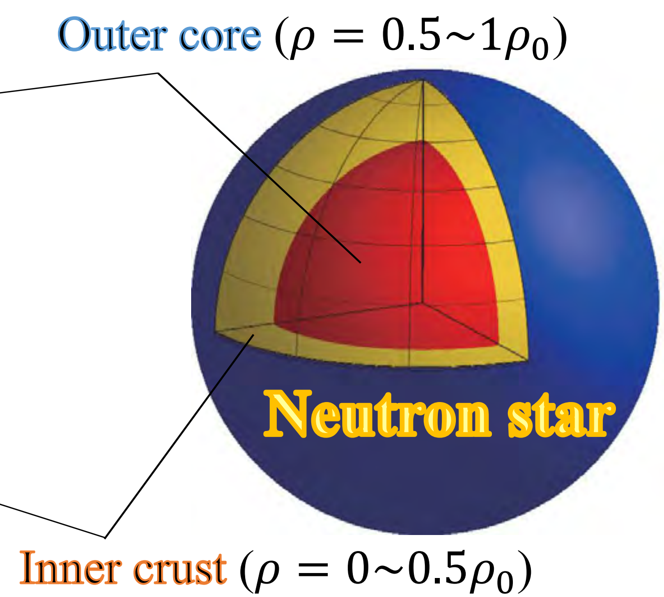


Appendix

Effects of repulsive core

Phase shift of $^1S_0$ NN scattering





ρ_0: Nuclear saturation density

Realistic nuclear potential (AV18) : R. B. Wiringa, *et al.*, PRC **51**, 38 (1995).

Effective range expansion

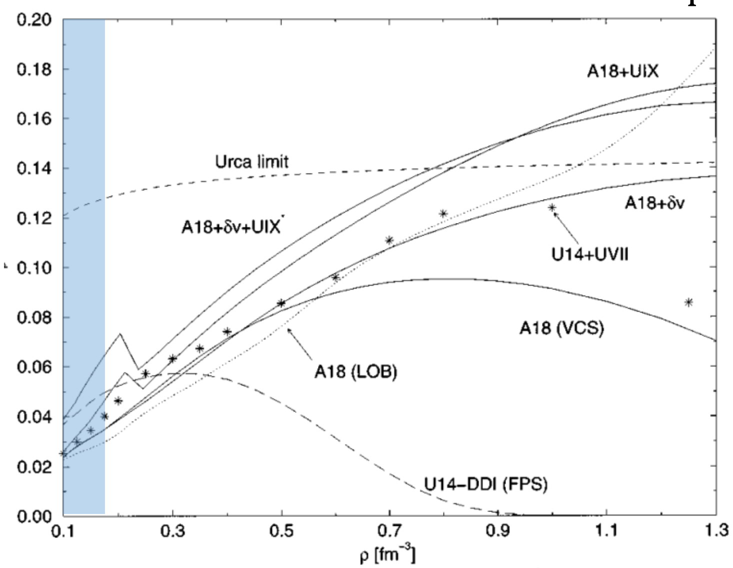
$$k\cot\delta_k = -\frac{1}{a_s} + \frac{1}{2}k^2 r_e$$

Effective range expansion breaks down in the relevant density region of neutron stars due to the high-energy repulsive force

Protons in "neutron star matter"

Proton fraction $Y_p = \dfrac{\rho_p}{\rho_n + \rho_p}$

Y_p



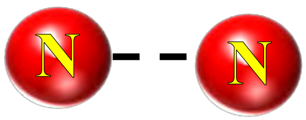
Density ρ [fm^{-3}]

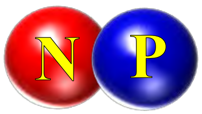
APR, PRC, **58**, 1804 (1998)

Typically $Y_p \simeq 0\sim0.1$

Dineutron correlation

Deuteron formation





- Cooper pairing without the density imbalance
- No binding energy

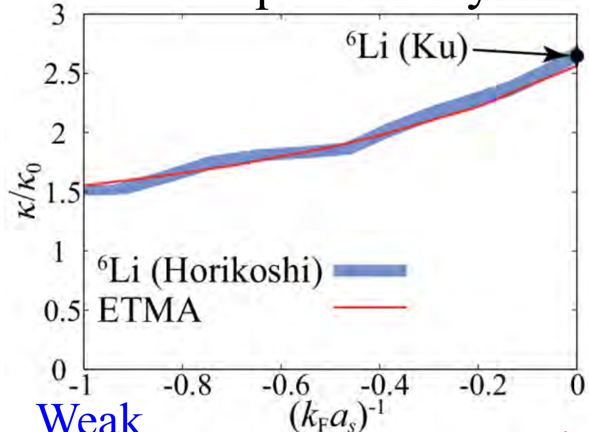
- Large density imbalance due to small proton fraction
- Finite binding energy

How strong spin-triplet np pairing affects $^1S_0$ superfluidity?

“More” precise description

Sound velocity (exp.) J. Joseph, *et al.*, PRL **98**, 170401 (2007), W. Weimer, *et al.*, PRL, **114**, 095301 (2015), S. Hoinka, *et al.*, Nat. Phys. (2017)
Compressibility (exp.) M. J. H. Ku,, *et al.*, Science **335**, 563 (2012).

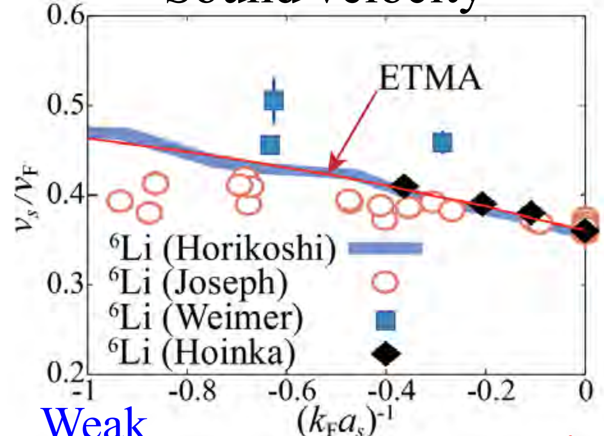
Compressibility



Weak coupling

Unitary

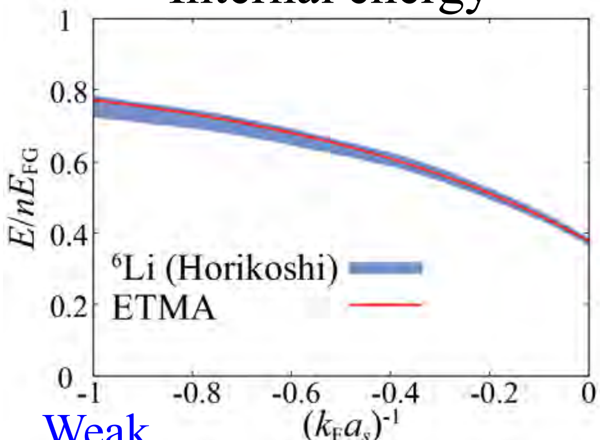
Sound velocity



Weak coupling

Unitary

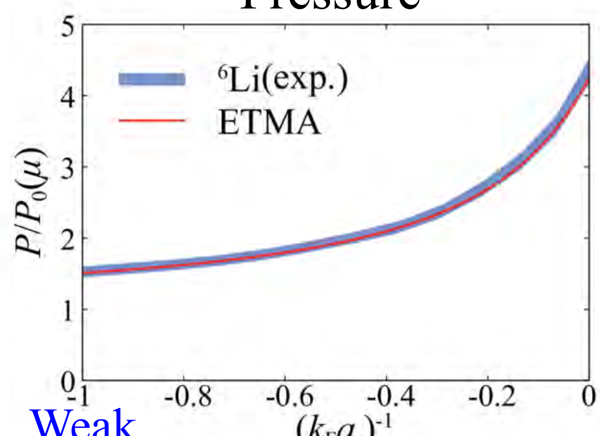
Internal energy



Weak coupling

Unitary

Pressure

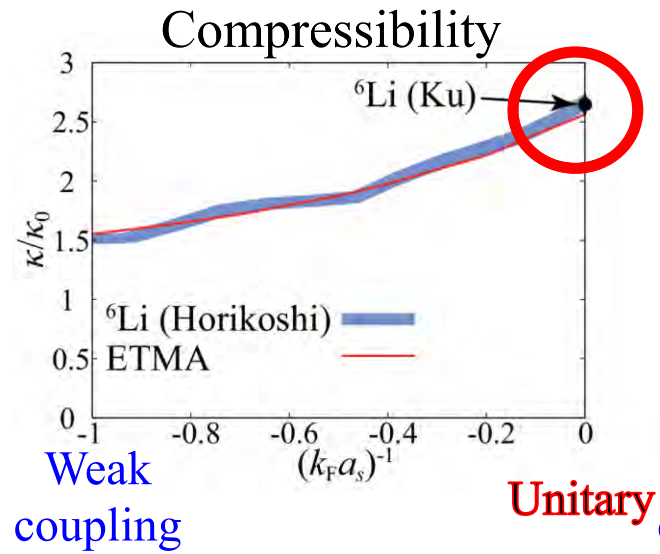


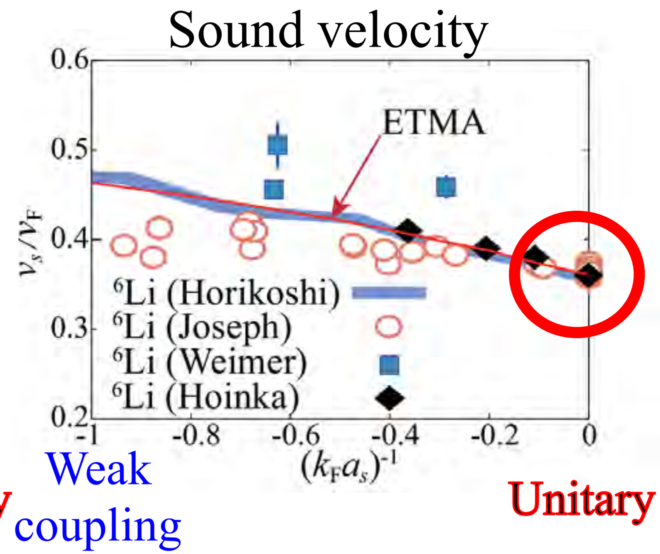
Weak coupling

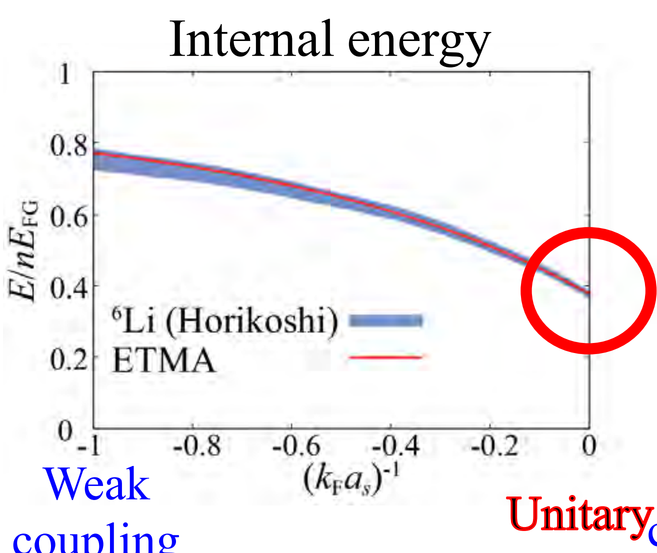
Unitary

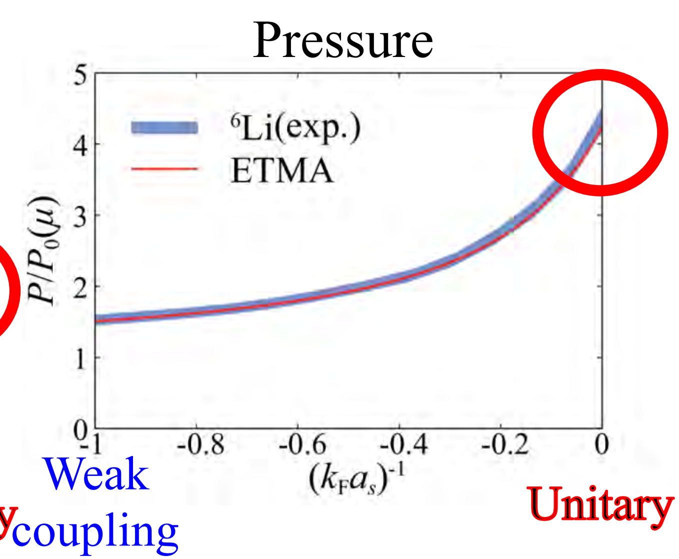
“More” precise description

Sound velocity (exp.) J. Joseph, *et al.*, PRL **98**, 170401 (2007), W. Weimer, *et al.*, PRL, **114**, 095301 (2015), S. Hoinka, *et al.*, Nat. Phys. (2017)
Compressibility (exp.) M. J. H. Ku,, *et al.*, Science **335**, 563 (2012).









Unitary Fermi gas

ξ: Bertsch parameter

$\xi \simeq 0.38$ (ETMA)

Compressibility $\kappa = \frac{1}{\xi}\kappa_0$

Sound velocity $v_s = \sqrt{\frac{\xi}{3}}\,v_F$

Internal energy $E = \frac{3}{5}\xi n \varepsilon_F$

Pressure $P = \xi^{-\frac{3}{2}} P_0$

Low-energy scattering

- Yamaguchi potential (Rank-1)

$$T^{-1}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},2\varepsilon_{\boldsymbol{k}}+i\delta)=-\frac{[1-J_{11}(\boldsymbol{k})]}{\gamma_1^2(\boldsymbol{k})}=-\frac{(k^2+\Lambda_1^2)^2}{u_1^2}\left[1-\frac{mu_1^2}{8\pi\Lambda_1}\frac{1}{(\Lambda_1-ik)^2}\right]$$

$$J_{11}(\boldsymbol{k})=\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{m\,\gamma_1^2(p)}{p^2-k^2-i\delta}=\frac{mu_1^2}{8\pi\Lambda_1}\frac{1}{(\Lambda_1-ik)^2}$$

$$\boxed{\frac{4\pi}{m}T^{-1}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},2\varepsilon_{\boldsymbol{k}}+i\delta)=k\cot\delta-ik\simeq-\frac{1}{a_s}+\frac{1}{2}r_{\mathrm{e}}k^2-ik}$$

δ : phase shift a_s : s-wave scattering length r_{e} : effective range

$$\Rightarrow\quad \Lambda_1=\frac{3+\sqrt{9-\frac{16r_{\mathrm{e}}}{a_s}}}{2r_{\mathrm{e}}}\qquad u_1=\Lambda_1^2\sqrt{\frac{8\pi}{m}\frac{1}{\Lambda_1-2/a_s}}$$

Low-energy scattering

- Multi-rank potential (Rank-3)

$$T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},2\varepsilon_{\boldsymbol{k}}+i\delta)=\boldsymbol{\gamma}^t(\boldsymbol{k})\left[1+\hat{\eta}\hat{J}(\boldsymbol{k})\right]^{-1}\hat{\eta}\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{k})$$

$$\hat{\eta}=\mathrm{diag}(-1,1,1)\quad \gamma_{i=1,2}(\boldsymbol{k})=\frac{u_i}{k^2+\Lambda_i^2}\quad \gamma_3(\boldsymbol{k})=\frac{u_3k^2}{(k^2+\Lambda_3^2)^2}$$

- The form factor of repulsive part $\gamma_3(\boldsymbol{k})$ is chosen to become larger at higher momentum region

$$T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},2\varepsilon_{\boldsymbol{k}}+i\delta)=$$

$$\frac{-[(1+J_{22})(1+J_{33})-J_{23}^2]\gamma_1^2+[(1-J_{11})(1+J_{33})+J_{13}^2]\gamma_2^2+[(1-J_{11})(1+J_{22})+J_{12}^2]\gamma_3^2-2\gamma_1\gamma_2[J_{13}J_{23}-J_{12}(1+J_{33})]-2\gamma_1\gamma_3[J_{12}J_{23}-J_{13}(1+J_{22})]-2\gamma_2\gamma_3[J_{12}J_{13}+J_{23}(1-J_{11})]}{(1-J_{11})(1+J_{22})(1+J_{33})-2J_{12}J_{23}J_{13}+J_{12}^2(1+J_{33})+J_{13}^2(1+J_{22})-J_{23}^2(1-J_{11})}$$

$$J_{ii}(\boldsymbol{k})=\frac{mu_i^2}{8\pi\Lambda_i}\frac{1}{(\Lambda_i-ik)^2}\qquad J_{33}(\boldsymbol{k})=\frac{mu_3^2}{64\pi\Lambda_3}\frac{-5k^2-4i\Lambda_3k+\Lambda_3^2}{(k+i\Lambda_3)^4}$$

$$(i=1,2)$$

$$J_{12}(\boldsymbol{k})=\frac{mu_1u_2}{4\pi(\Lambda_1+\Lambda_2)}\frac{1}{(\Lambda_1-ik)(\Lambda_2-ik)}\qquad J_{i3}(\boldsymbol{k})=\frac{mu_iu_3}{8\pi(\Lambda_i+\Lambda_3)^2}\frac{-\Lambda_i\Lambda_3+ik(2\Lambda_i+\Lambda_3)}{(\Lambda_1-ik)(k+i\Lambda_3)^2}$$

1. We numerically determine u_1 and Λ_1 to reproduce a_s and r_{e}.
2. After that, u_2, Λ_2, u_3, and Λ_3 are updated by the least-square method for the AV18 phase shift.
3. We go to 1 and repeat them until we obtain an enough small square error.

Thermal Green's function with the Hartree self-energy

$$\boxed{G^{\mathrm{H}}_{\mathrm{I},\sigma}(k) = \frac{1}{i\omega_n - \xi^{\mathrm{I}}_{\boldsymbol{k}} - \Sigma^{\mathrm{H}}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k})}}$$

$I = n, p$
$\sigma = \uparrow, \downarrow$

$\xi^{\mathrm{I}}_{\boldsymbol{k}} = \frac{k^2}{2m_{\mathrm{N}}} - \mu_{\mathrm{I}}$: Kinetic energy measured from the chemical potential

$k = (\boldsymbol{k}, i\omega_n)$ $\omega_n = (2n+1)\pi T$: Fermion Matsubara frequency

Neutron Hartree self-energy

$$\Sigma^{\mathrm{H}}_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{k}) = T\sum_{k'}\left[V_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{K})G^{\mathrm{H}}_{\mathrm{n}}(k') + \left\{\frac{V_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}) + 3V_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{K})}{2}\right\}G^{\mathrm{H}}_{\mathrm{p}}(k')\right]$$

$$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')/2$$

Proton Hartree self-energy

$$\Sigma^{\mathrm{H}}_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{k}) = T\sum_{\boldsymbol{k}', i\omega_n}\left[V_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{K})G^{\mathrm{H}}_{\mathrm{p}}(k') + \left\{\frac{V_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}) + 3V_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{K})}{2}\right\}G^{\mathrm{H}}_{\mathrm{n}}(k')\right]$$

In this study, we use $\Sigma^{\mathrm{H}}_{I}(\boldsymbol{k} = k_{\mathrm{F},I})$ for simplicity

Number equation in the normal state

$$\boxed{\rho_{\mathrm{I}} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_{\mathrm{I}}} = \rho_{\mathrm{I}}^{\mathrm{H}} - \frac{\partial \delta \Omega_{\mathrm{NSR}}}{\partial \mu_{\mathrm{I}}}}$$

$\rho_{\mathrm{n,p}}^{\mathrm{H}}$: Hartree density

$$\rho_{\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{n}}^{\mathrm{H}} + L_{\mathrm{nn}} \delta \rho_{\mathrm{n}}^{\mathrm{NSR}} + L_{\mathrm{pn}}\, \delta \rho_{\mathrm{p}}^{\mathrm{NSR}} \qquad \rho_{\mathrm{p}} = \rho_{\mathrm{p}}^{\mathrm{H}} + L_{\mathrm{pp}} \delta \rho_{\mathrm{p}}^{\mathrm{NSR}} + L_{\mathrm{np}}\, \delta \rho_{\mathrm{n}}^{\mathrm{NSR}}$$

$$\delta \rho_{\mathrm{I}}^{\mathrm{NSR}} = -T \sum_q \frac{\partial}{\partial \mu_{\mathrm{I}}^{\mathrm{H}}} \ln \det\left[1 + \hat{\eta}_{\mathrm{s}} \widehat{\Pi}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{II}}(q)\right] - T \sum_q \frac{\partial}{\partial \mu_{\mathrm{I}}^{\mathrm{H}}} \ln \det\left[1 + \hat{\eta}_{\mathrm{s}} \widehat{\Pi}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{np}}(q)\right]$$

$$-3T \sum_q \frac{\partial}{\partial \mu_{\mathrm{I}}^{\mathrm{H}}} \ln \det\left[1 + \hat{\eta}_{\mathrm{t}} \widehat{\Pi}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{np}}(q)\right]$$

$\mu_{\mathrm{I}}^{\mathrm{H}} = \mu_{\mathrm{I}} - \Sigma_{\mathrm{I}}^{\mathrm{H}}$: effective chemical potential

$$\widehat{\Pi}_{\mathrm{s,t}}^{\mathrm{II'}}(q)\Big|_{ij} = T \sum_k \gamma_i(\boldsymbol{k}) \gamma_j(\boldsymbol{k}) G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{H}}(k+q) G_{\mathrm{I'}}^{\mathrm{H}}(-k)$$

: pairing susceptibility

$$L_{\mathrm{II'}} = 1 - \frac{\partial \Sigma_{\mathrm{I}}^{\mathrm{H}}}{\partial \mu_{\mathrm{I'}}}$$

: Static vertex correction for compressibility matrix

$$\begin{pmatrix} L_{\mathrm{nn}} & L_{\mathrm{np}} \\ L_{\mathrm{pn}} & L_{\mathrm{pp}} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+\Xi_{\mathrm{A}n})(1+\Xi_{\mathrm{A}p}) - \Xi_{\mathrm{B}n}\Xi_{\mathrm{B}p}} \begin{pmatrix} 1+\Xi_{\mathrm{A}p} & -\Xi_{\mathrm{B}n} \\ -\Xi_{\mathrm{B}p} & 1+\Xi_{\mathrm{A}n} \end{pmatrix}$$

$$\Xi_{\mathrm{AI}} = -T \sum_k V_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}) \left[G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{H}}(k)\right]^2 \qquad \Xi_{\mathrm{BI}} = -T \sum_k \left[\frac{V_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}) + 3V_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{K})}{2}\right] \left[G_{\mathrm{I}}^{\mathrm{H}}(k)\right]^2$$

Symmetric nuclear matter

- $^3S_1$ deuteron condensation in SNM