

コンパクト化空間  $\mathbb{R}^3 \times S^1$  に  
おける  $SU(N)$  QCD(adj.) のリノーマロン

九州大学  
高浦 大雅

# Contents

- イントロダクション
  - リサーチェンス、リノーマロン、バイオン
- QCD(adj.)におけるリノーマロン
- まとめ

# 摂動論

摂動論

$$\mathcal{O} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (g^2)^{n+1} : \text{無限和}$$

低次の摂動論  $\longrightarrow$  良い近似を与える

# 摂動論

摂動論

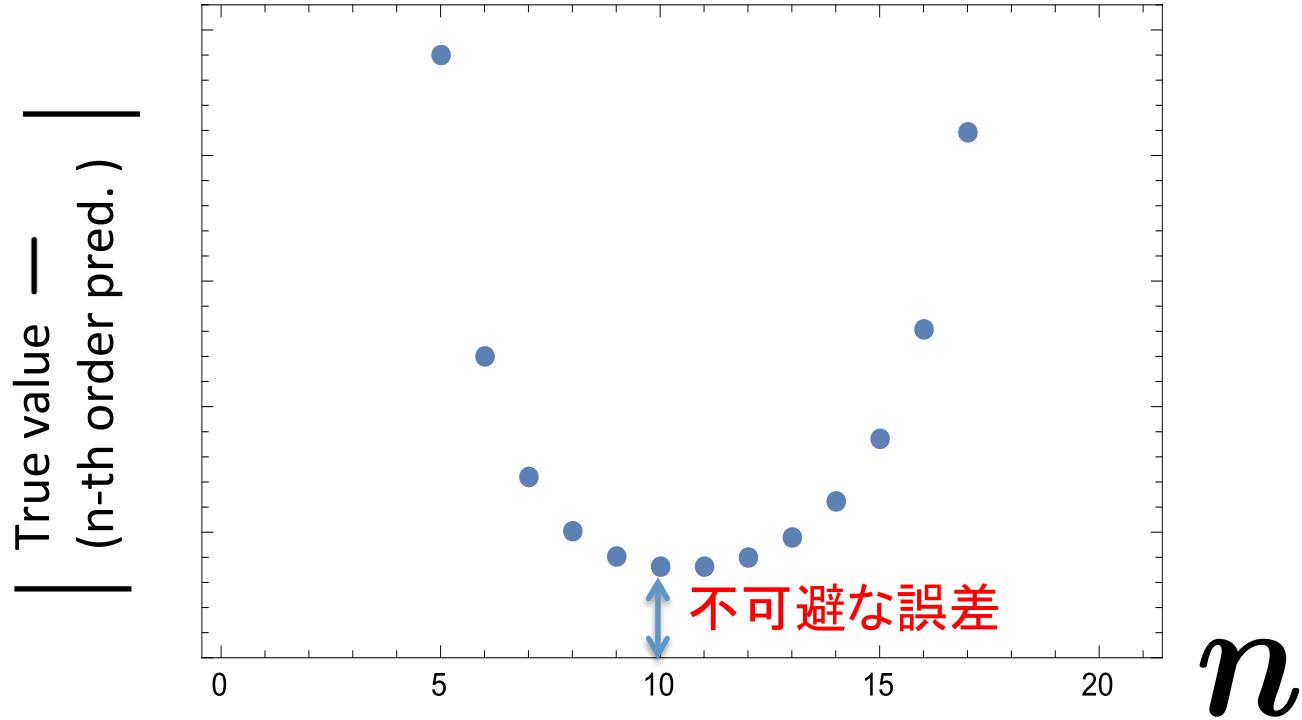
$$\mathcal{O} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (g^2)^{n+1} \quad : \text{無限和}$$

低次の摂動論  $\longrightarrow$  良い近似を与える

高次の摂動論  $\longrightarrow$  ある次数からは発散的な振る舞い

摂動係数の急速な増大

$$\mathcal{O} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (g^2)^{n+1} \quad \text{w/} \quad c_n \sim a^{-n} n!$$



発散的振る舞いは摂動論に不可避な誤差があることを意味する

# Borel resummation

物理量自身は有限



発散する摂動級数から有限な量を構成したい

## Borel resummation

$$\mathcal{O} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (g^2)^{n+1}$$

Resum Expand

$$\mathcal{O}_{\text{resum}} = \int_0^\infty du B(u) e^{-u/g^2}$$

Borel変換

$$\text{w/ } B(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} u^n$$

# 摂動論の誤差

$$\mathcal{O} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (g^2)^{n+1}$$

Resum Expand

$$\mathcal{O}_{\text{resum}} = \int_0^\infty du B(u) e^{-u/g^2} \quad \text{w/} \quad B(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} u^n$$

Borel変換

For  $c_n \sim \mathbf{a}^{-n} n!$   $\rightarrow B(u) = \frac{1}{1 - u/\mathbf{a}}$

$$\mathcal{O}_{\text{resum}} = \int_{0 \pm i\epsilon}^{\infty \pm i\epsilon} du \frac{1}{1 - u/\mathbf{a}} e^{-u/g^2} \sim \pm i e^{-\mathbf{a}/g^2}$$

摂動論の誤差は非摂動的な形になる。

誤差の大きさはボレル変換の特異点で特徴付けられる。

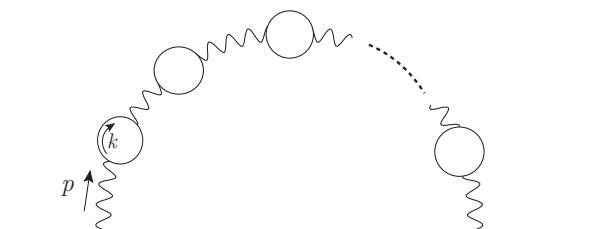
# 摂動係数の発散の要因

(i) ファインマンダイアグラムの数の増大

$n$ 次の摂動論でのファインマンダイアグラムの数  $\sim n!$

(ii) 特定のダイアグラムのamplitudeの増大

リノーマロン



# 摂動係数の発散の要因

(i) ファインマンダイアグラムの数の増大

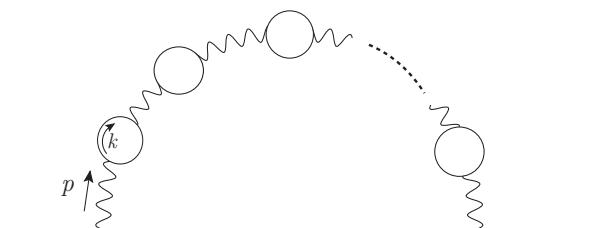
n次の摂動論でのファインマンダイアグラムの数  $\sim n!$

$$\longrightarrow a = 16\pi^2, \quad \delta_{\text{PT}}\mathcal{O} \sim e^{-16\pi^2/g^2}$$

(ii) 特定のダイアグラムのamplitudeの増大

$$\longrightarrow a = 16\pi^2/\beta_0, \quad \delta_{\text{PT}}\mathcal{O} \sim e^{-16\pi^2/(\beta_0 g^2)} \quad \text{リノーマロン}$$

$$\beta(g^2) = -\frac{\beta_0}{16\pi^2}g^4 + \dots$$

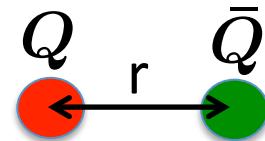


# Renormalon problem in QCD

Static QCD potential

Three-loop [ $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ ] result is available

Anzai, Kiyo, Sumino  
Smirnov, Smirnov, Steinhauser

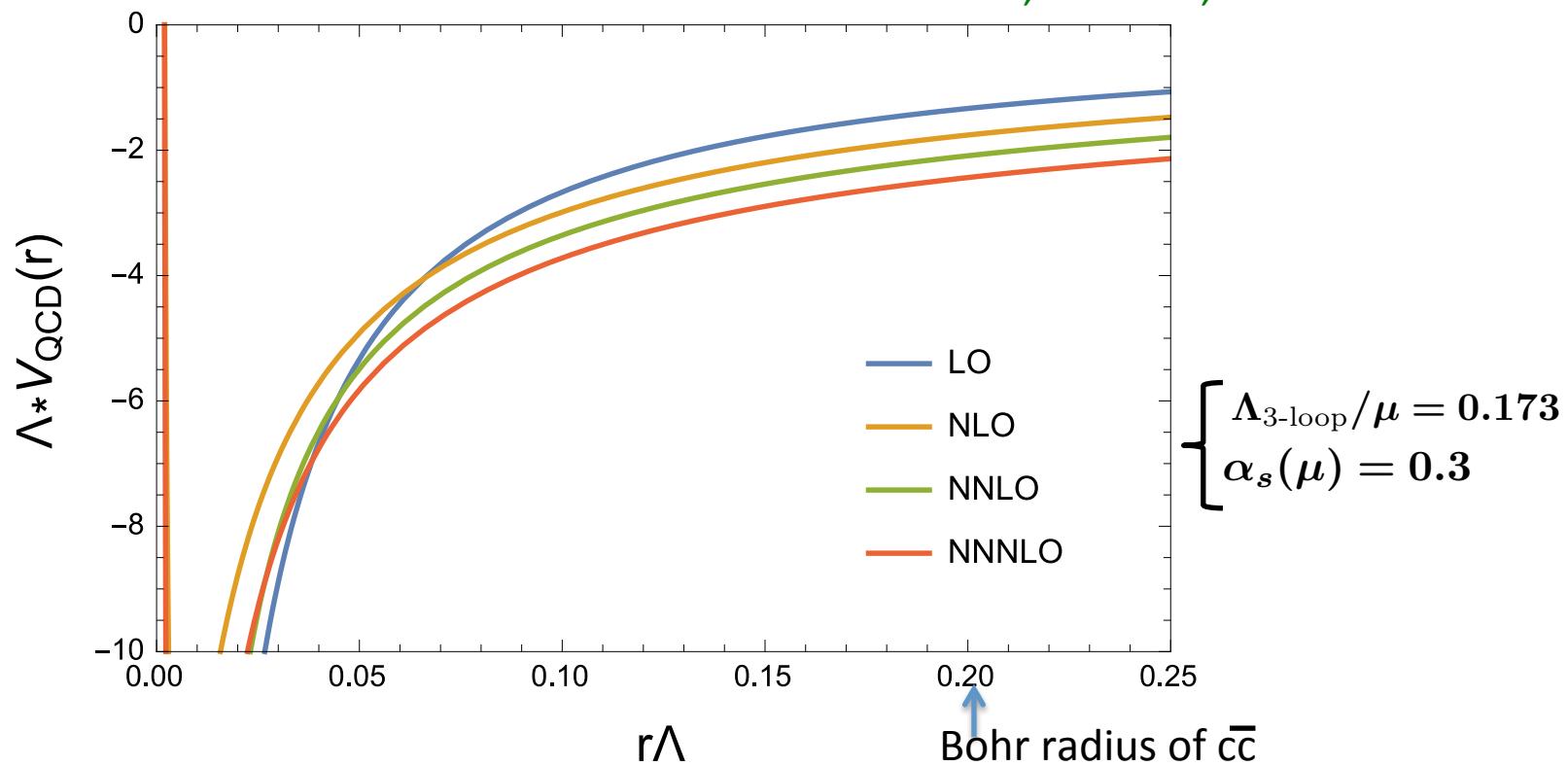


# Renormalon problem in QCD

Static QCD potential

Three-loop [ $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ ] result is available

Anzai, Kiyo, Sumino  
Smirnov, Smirnov, Steinhauser



# Renormalon in static QCD pot

$$N^* \sim \frac{16\pi^2 u}{\beta_0 g^2} = \frac{4\pi}{\beta_0 \alpha_s} u = \frac{4\pi}{(11-2) \cdot 0.3} \frac{1}{2} \simeq 2.3$$

Renormalon is already problematic.

# 対応する非摂動効果

## 摂動論の誤差

(i) ファインマンダイアグラムの  
数の増大

$$\delta_{\text{PT}} \mathcal{O} \sim e^{-16\pi^2/g^2}$$

(ii) リノーマロン

$$\delta_{\text{PT}} \mathcal{O} \sim e^{-16\pi^2/(\beta_0 g^2)}$$

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N - \frac{2}{3} n_f \text{ in } SU(N)$$

## 相殺

## 非摂動効果

インスタントン-反インスタントン  
amplitude

$$\delta_{\text{NP}} \mathcal{O} \sim e^{-2S_I}$$

w/  $S_I = 8\pi^2/g^2$

1977 't Hooft

対応する非摂動効果は???

# 対応する非摂動効果

## 摂動論の誤差

(i) ファインマンダイアグラムの  
数の増大

$$\delta_{\text{PT}} \mathcal{O} \sim e^{-16\pi^2/g^2}$$

(ii) リノーマロン

$$\delta_{\text{PT}} \mathcal{O} \sim e^{-16\pi^2/(\beta_0 g^2)}$$

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N - \frac{2}{3} n_f \text{ in } SU(N)$$

## 相殺

## 非摂動効果

インスタントン-反インスタントン  
amplitude

$$\delta_{\text{NP}} \mathcal{O} \sim e^{-2S_I}$$

w/  $S_I = 8\pi^2/g^2$

1977 't Hooft

バイオン(?)

Conjecture by Argyres-Unsal 2012

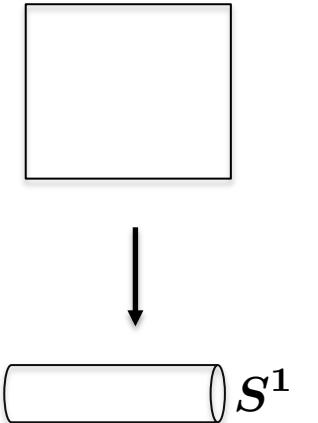
# バイオン

バイオンはcircleコンパクト化された空間  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-1} \times S^1$  で見つかった非自明な古典解

分数インスタントンと反インスタントンのペア  $S_{\text{bion}} = 2S_I/\textcolor{red}{N}$

$$\delta_{\text{NP}} \mathcal{O} \sim e^{-S_{\text{bion}}} \longleftrightarrow \delta_{\text{PT}} \mathcal{O} \sim e^{-16\pi^2/(\beta_0 g^2)}$$

$$\text{w/ } \beta_0 = \frac{11}{3}\textcolor{red}{N} - \frac{2}{3}n_f$$



何故コンパクト化を考えるのか? (Argued by Argyres-Unsal)

- Twisted boundary conditionを考えれば  
真空構造(confinement, mass gap)が保たれる.
- $\mathbb{R}^{d-1} \times S^1$  の世界が  $\mathbb{R}^d$  にスムースにつながる

ゲージダイナミクスを  $R$  ( $R\Lambda \ll 1$ ) すなわち  $g^2(R^{-1}) \ll 1$  において  
半古典近似で理解できるかもしれない.

QCD-like theories:  $\mathbb{C}P^{N-1}$  model on 2D, QCD(adj.) on 4D

# Conjectureの現状

$\mathbb{C}P^{N-1}$  modelの場合

バイオンの誤差

$u = 1, 2, 3, \dots$

Fujimori et al.  
2018

リノーマロン誤差

$u = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad \mathbb{R} \times S^1$

Ishikawa, Morikawa,  
Nakayama, Shibata,  
Suzuki, Takaura

↑コンパクト化

$u = 2, 3, 4, \dots$

バイオンはリノーマロンを相殺しない

# Conjectureの現状

QCD(adj.)の場合

バイオノン誤差

$$u = \frac{\beta_0}{N}, \frac{2\beta_0}{N}, \frac{3\beta_0}{N}, \dots$$

Argyres Unsal

2012

くりこみにより

$$u = 1, 2, 3, \dots \text{ と期待}$$

リノーマロン誤差

???

↑コンパクト化

$$u = 2, 3, 4, \dots$$

Anber-Sulejmanasic(2014)はリノーマロン誤差はないと主張  
(N=2,3)

# Conjectureの現状

QCD(adj.)の場合

## バイオンの誤差

$$u = \frac{\beta_0}{N}, \frac{2\beta_0}{N}, \frac{3\beta_0}{N}, \dots$$

Argyres Unsal

2012

くりこみにより

$u = 1, 2, 3, \dots$  と期待

## リノーマロン誤差

$u = 2, 3, \dots$  Our result in  
large N

↑コンパクト化

$u = 2, 3, 4, \dots$

Anber-Sulejmanasic(2014)はリノーマロン誤差はないと主張  
(N=2,3)

# Contents

- イントロダクション
  - リサーチェンス、リノーマロン、バイオン
- QCD(adj.)におけるリノーマロン
- まとめ

# QCD(adj.)

SU(N) QCD with adjoint fermions on 4D       $\lambda = Ng^2 \lesssim 1$

$$S = -\frac{N}{2\lambda} \int d^4x \operatorname{tr}[\tilde{F}_{\mu\nu}(x)\tilde{F}_{\mu\nu}(x)] - 2 \int d^4x \operatorname{tr}\left\{\bar{\psi}(x)\gamma_\mu[\partial_\mu\tilde{\psi}(x) + [A_\mu(x), \psi(x)]]\right\}$$

全ての場に対して twisted boundary condition を課す

$$\tilde{\psi}(x_0, x_1, x_2, x_3 + 2\pi R) = \Omega \tilde{\psi}(x_0, x_1, x_2, x_3) \Omega^{-1}$$

$$\tilde{A}_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3 + 2\pi R) = \Omega \tilde{A}_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3) \Omega^{-1}$$

w/       $(\Omega)_{jj} = e^{i\pi \frac{N+1}{N}} e^{-i\frac{2\pi}{N}j}$       ( $j = 1, \dots, N$ )

# 成分分解

Cartan-Weyl basis

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_\mu(x) = -i \sum_{\ell=1}^{N-1} \tilde{A}_\mu^\ell(x) H_\ell - i \sum_{m \neq n} \tilde{A}_\mu^{mn}(x) E_{mn} \\ \tilde{\psi}(x) = -i \sum_{\ell=1}^{N-1} \tilde{\psi}^\ell(x) H_\ell - i \sum_{m \neq n} \tilde{\psi}^{mn}(x) E_{mn} \end{array} \right.$$

$\tilde{A}_\mu^\ell$  : photon     $\tilde{A}_\mu^{mn}$  : W-boson

$$\Omega H_\ell \Omega^{-1} = H_\ell$$

$$\Omega E_{mn} \Omega^{-1} = e^{-i \frac{2\pi}{N} (m-n)} E_{mn}$$

→ Twistにより  $\tilde{\psi}^{mn}(x)$  や  $\tilde{A}_\mu^{mn}(x)$  (W-boson)に  
非自明な位相を与える

# Tree-level propagators

$$\langle \psi^m(x) \bar{\psi}^n(y) \rangle_0 = \delta^{mn} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi R} \sum_{p_3=n/R} e^{ip(x-y)} \frac{1}{i\cancel{p}}$$

$$\langle \tilde{\psi}^{mn}(x) \tilde{\psi}^{pq}(y) \rangle_0 = \delta^{mq} \delta^{np} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi R} \sum_{p_3=n/R} e^{i\cancel{p}_{mn}(x-y)} \frac{1}{i\cancel{p}_{mn}}$$

$$\langle A_\mu^m(x) A_\mu^n(y) \rangle_0 = \frac{\lambda}{N} \delta^{mn} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi R} \sum_{p_3=n/R} e^{ip(x-y)} \frac{1}{(p^2)^2} \left[ (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) + \frac{1}{\xi_0} p_\mu p_\nu \right]$$

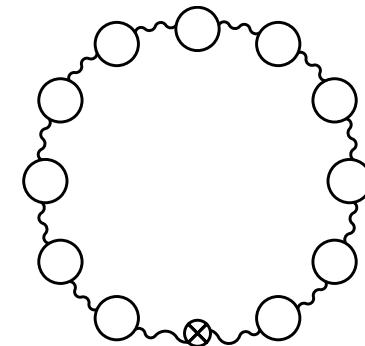
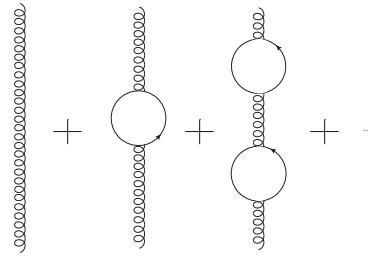
$$\langle \tilde{A}_\mu^{mn}(x) \tilde{A}_\mu^{pq}(y) \rangle_0 = \frac{\lambda}{N} \delta^{mq} \delta^{np} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi R} \sum_{p_3=n/R} e^{i\cancel{p}_{mn}(x-y)} \frac{1}{(\cancel{p}_{mn}^2)^2} \left[ (\delta_{\mu\nu} \cancel{p}_{mn}^2 - \cancel{p}_{mn,\mu} \cancel{p}_{mn,\nu}) + \frac{1}{\xi_0} \cancel{p}_{mn,\mu} \cancel{p}_{mn,\nu} \right]$$

$$p_{mn,3} = p_3 - \frac{m-n}{RN} = \frac{j}{R} - \frac{m-n}{RN}$$

# Procedure

$\langle \text{tr}(\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) \rangle$  に含まれるリノーマロンを調べる

1. ゲージ場のプロパゲータの計算



2. グルーオン凝縮のリノーマロン計算

# Fermion contribution

$\langle \tilde{A}_\mu^\ell(x) \tilde{A}_\nu^r(y) \rangle$ へのfermion vacuum polarizationの補正

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi R} \sum_{k_3=j/R} \text{tr} \left[ \frac{1}{i\cancel{k}_{mn}} \gamma_\mu \frac{1}{i(\cancel{k}_{mn} - \cancel{p})} \gamma_\nu \right]$$

ループ積分

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi R} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(k_0, , k_1, k_2, j/R) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} e^{ik_3 2\pi R j} f(k_0, k_1, k_2, k_3)$$

$j = 0 \longrightarrow$  無限体積

$j \neq 0 \longrightarrow$  有限体積補正

# Propagators at one-loop

$$\langle \tilde{A}_\mu^\ell(x) \tilde{A}_\nu^r(y) \rangle = \frac{\lambda}{N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi R} \sum_{p_3} e^{ip(x-y)} \frac{1}{(p^2)^2} \left\{ [(1 - \textcolor{orange}{L})^{-1}]^{\ell r} p^2 \mathcal{P}_{\mu\nu}^L + [(1 - \textcolor{orange}{T})^{-1}]^{\ell r} p^2 \mathcal{P}_{\mu\nu}^T + \delta^{\ell r} \frac{1}{\xi} p_\mu p_\nu \right\}$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}_\mu^{mn}(x) \tilde{A}_\nu^{pq}(y) \rangle &= \frac{\lambda}{N} \delta^{mq} \delta^{np} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi R} \sum_{p_3} \left\{ e^{ip(x-y)} \frac{1}{(p^2)^2} \right. \\ &\quad \times \left. \left[ (1 - \textcolor{orange}{L})^{-1} p^2 \mathcal{P}_{\mu\nu}^L + (1 - \textcolor{orange}{T})^{-1} p^2 \mathcal{P}_{\mu\nu}^T + \frac{1}{\xi} p_\mu p_\nu \right] \right\} \Big|_{p \rightarrow \textcolor{red}{p_{mn}}} \end{aligned}$$

Large- $\beta_0$  approximation is used to include gauge field contribution.

$$L^{\ell r} = \frac{\beta_0 \lambda}{16\pi^2} \delta^{\ell r} \log \left( \frac{e^{5/3} \mu^2}{p^2} \right) + \delta L^{\ell r}$$

$$T^{\ell r} = \frac{\beta_0 \lambda}{16\pi^2} \delta^{\ell r} \log \left( \frac{e^{5/3} \mu^2}{p^2} \right) + \delta T^{\ell r}$$

$$L = \frac{\beta_0 \lambda}{16\pi^2} \log \left( \frac{e^{5/3} \mu^2}{p^2} \right) + \delta L$$

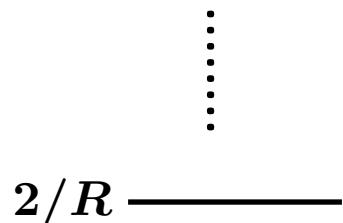
$$T = \frac{\beta_0 \lambda}{16\pi^2} \log \left( \frac{e^{5/3} \mu^2}{p^2} \right) + \delta T$$

有限体積効果 =  $\mathcal{O}(1/N)$  で suppressされる

無限体積のときと同じプロパゲータを得る

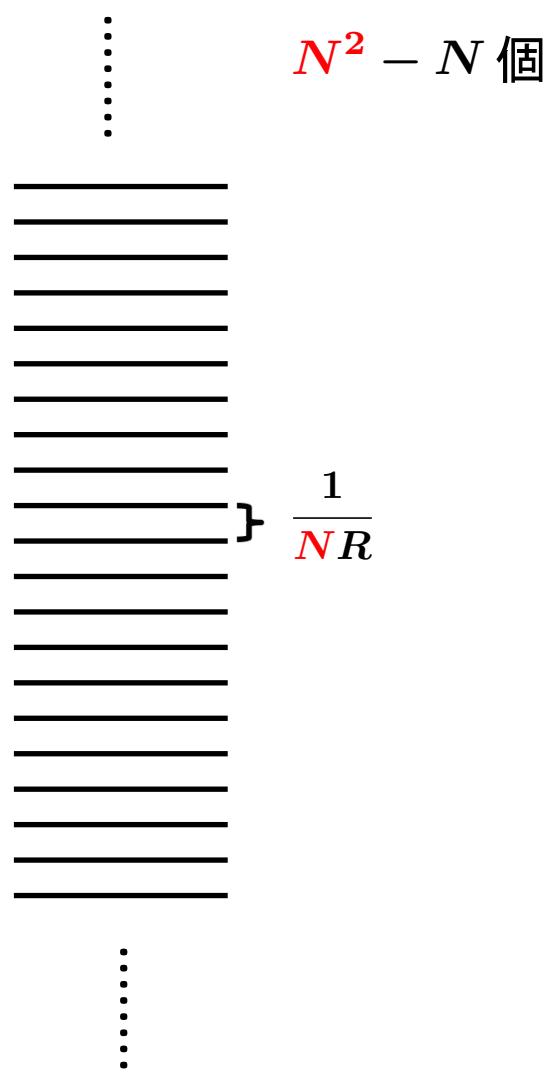
Periodic boundary condition

$$(\psi^\ell, A_\mu^\ell)$$



Twisted boundary condition

$$(\psi^{mn}, A_\mu^{mn})$$



$N - 1$  個

$N^2 - N$  個

# グルーオン凝縮

グルーオン凝縮のリノーマロンを調べる

$$\langle \text{tr}(\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) \rangle \sim \langle \text{tr}(\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) \rangle|_{W\text{-boson}}$$

$$= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} f_k|_{W\text{-boson}} \left( \frac{\beta_0 \lambda}{16\pi^2} \right)^k$$

$$f_k|_{W\text{-boson}} = -3 \frac{1}{N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi R} \sum_{p_3=j/R} \sum_{m \neq n} \log \left( \frac{\mu^2 e^{5/3}}{p_{mn}^2} \right)$$

$$p_{mn,3} = p_3 - \frac{m-n}{RN} = \frac{j}{R} - \frac{m-n}{RN}$$

Large-N

$$\xrightarrow{} -3N \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \log \left( \frac{e^{5/3} \mu^2}{p^2} \right)^k$$

無限体積のときと同じ摂動級数 → 無限体積と同じ Borel singularity

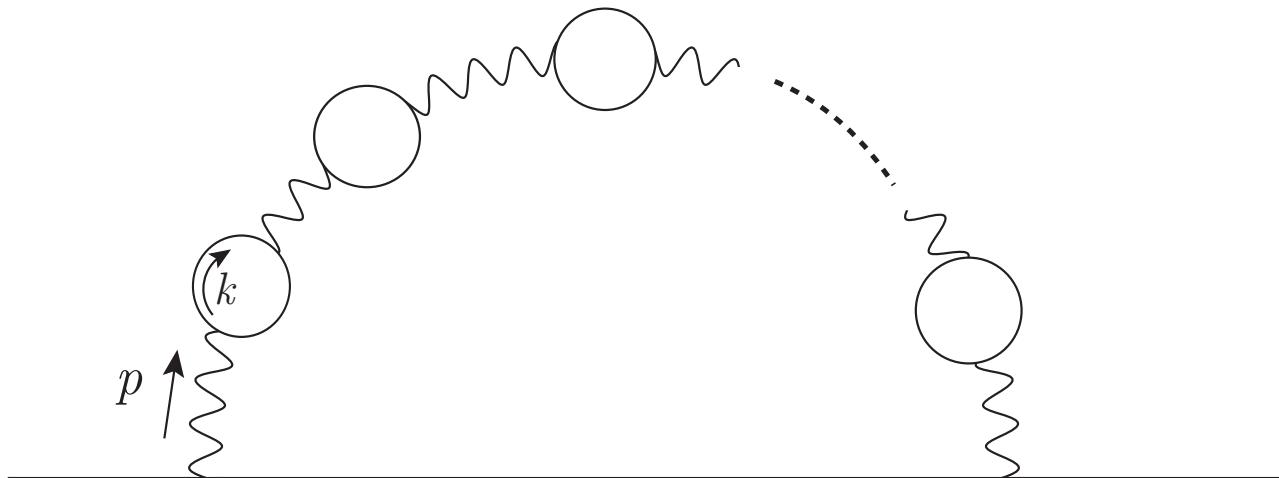
# $\mathbb{C}P^{N-1}$ case

ループ運動量  $k$  がtwisted

→  $A_\mu$  のプロパゲータ (function of  $p$ )は無限体積と同じ

ループ運動量  $p$  はnot twisted

→ リノーマロンは無限体積から変化



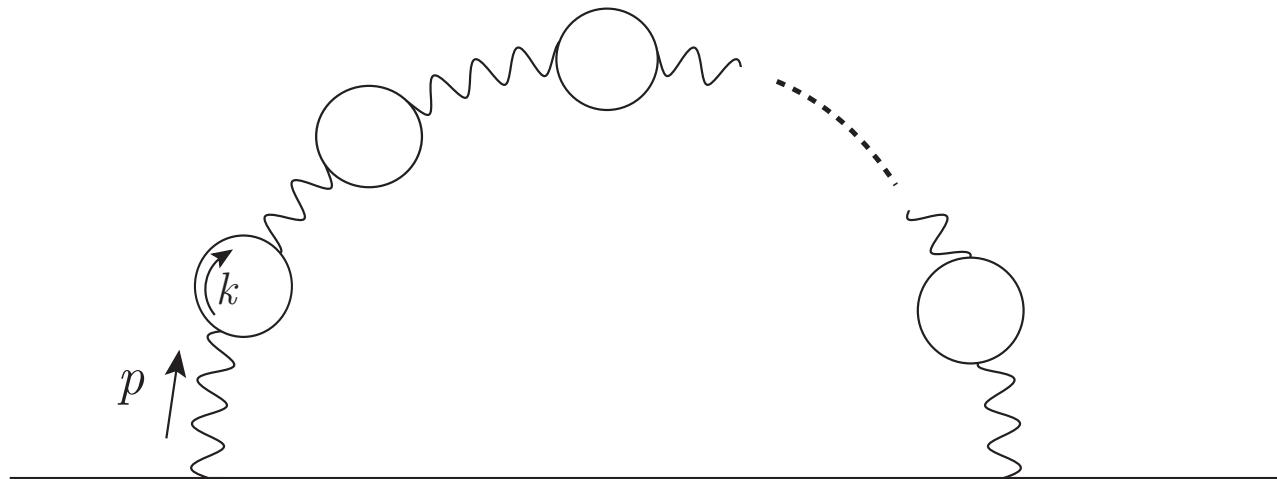
# QCD(adj.) case

ループ運動量  $k$  がtwisted

→  $A_\mu$  のプロパゲータ (function of  $p$ )は無限体積と同じ

ループ運動量  $p$ もtwisted

→ リノーマロンは無限体積と同じ



# まとめ

- ・ 摂動論にはリノーマロン誤差と呼ばれる不可避な誤差が存在する。
- ・ リノーマロン誤差は非摂動的な形を持ち、非摂動効果と相殺するはずである。
- ・ 近年、バイオンと呼ばれるコンパクト化された空間での古典解がリノーマロンを相殺するオブジェクトであるというコンジェクチャーが提唱されている。  
バイオンの誤差は「コンパクト化されていない空間でのリノーマロン誤差」とコンシスティントになるだろう  
コンパクト化はリノーマロン構造を変えないか？
- ・ QCD(adj.)ではコンパクト化はリノーマロンの構造を変えない

# まとめ

- ・ 摂動論にはリノーマロン誤差と呼ばれる不可避な誤差が存在する。
- ・ リノーマロン誤差は非摂動的な形を持ち、非摂動効果と相殺するはずである。
- ・ 近年、バイオンと呼ばれるコンパクト化された空間での古典解がリノーマロンを相殺するオブジェクトであるというコンジェクチャーが提唱されている。  
バイオンの誤差は「コンパクト化されていない空間でのリノーマロン誤差」とコンシスティントになるだろう

$$u = \frac{\beta_0}{N}, \frac{2\beta_0}{N}, \frac{3\beta_0}{N}, \dots \xrightarrow{\text{期待}} u = 1, 2, 3, \dots$$

未だバイオンがリノーマロンを説明できる明確なケースはない