

QCD摂動計算の最近の発展と パートン分布関数

植田高寛 (成蹊大学)



第16回高エネルギーQCD・核子構造勉強会
2020年2月19日@東北大学

今日お話ししたいこと

LHC実験での必要性を背景とした
QCDの高次摂動計算(fixed order)の最近の発展

パートン分岐関数(splitting function)のQCD高次補正計算

J. Davies, A. Vogt, B. Ruijl, TU, J.A.M. Vermaseren, NPB915 (2017) 335, arXiv:1610.07477
S. Moch, B. Ruijl, TU, J.A.M. Vermaseren, A. Vogt, JHEP 10 (2017) 041, arXiv:1707.08315
S. Moch, B. Ruijl, TU, J.A.M. Vermaseren, A. Vogt, PLB782 (2018) 627, arXiv:1805.09638
F. Herzog, S. Moch, B. Ruijl, TU, J.A.M. Vermaseren, A. Vogt, PLB790 (2019) 436, arXiv:1812.11818

QCD摂動計算@LHC

量子色力学(QCD)

強い力を記述 SU(3)ゲージ理論

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}$$

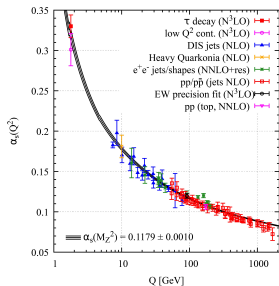


クォークとグルーオンの相互作用

漸近的自由性

(大きな運動量移行を伴う) 高エネルギー散乱
では摂動論が使える

$$\alpha_s(m_Z) \sim 0.1$$



2019RPP Fig. 9.5

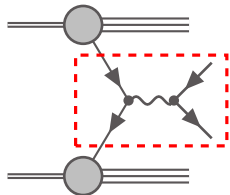
因子化「定理」

DISやDrell-Yanなどの散乱過程を

- 摂動論で計算できるhard part
- 非摂動論的なsoft part

に分ける

$$\sigma = \left(\begin{array}{c} \text{hard} \\ \text{scattering} \end{array} \right) \otimes \left(\begin{array}{c} \text{PDFs} \\ \text{and/or FFs} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{power-suppressed} \\ \text{terms} \end{array} \right)$$



$$\sigma \sim \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_{f_1/h_1}(x_1) f_{f_2/h_2}(x_2) \times \hat{\sigma}(f_1 f_2 \rightarrow \bar{l} l)$$

摂動展開

hard part: パートン・レベルでの散乱断面積を α_s で展開

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_0 + \alpha_s \hat{\sigma}_1 + \alpha_s^2 \hat{\sigma}_2 + \alpha_s^3 \hat{\sigma}_3 + \dots$$

LO NLO NNLO N³LO

摂動展開

hard part: パートン・レベルでの散乱断面積を α_s で展開

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_0 + \alpha_s \hat{\sigma}_1 + \alpha_s^2 \hat{\sigma}_2 + \alpha_s^3 \hat{\sigma}_3 + \dots$$

LO NLO NNLO N³LO

$$\hat{\sigma}_0 \sim \left| \begin{array}{c} \text{---} \diagup \text{---} \\ | \\ \text{---} \diagdown \text{---} \end{array} \right|^2$$

Tree

摂動展開

hard part: パートン・レベルでの散乱断面積を α_s で展開

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_0 + \alpha_s \hat{\sigma}_1 + \alpha_s^2 \hat{\sigma}_2 + \alpha_s^3 \hat{\sigma}_3 + \dots$$

LO NLO NNLO N³LO

$$\hat{\sigma}_1 \sim \left[\text{Tree} \times \text{Virtual} + \text{Real} \right]^2$$

Tree Virtual Real

IR発散はVirtualとReal間でキャンセル

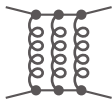
摂動展開

hard part: パートン・レベルでの散乱断面積を α_s で展開

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_0 + \alpha_s \hat{\sigma}_1 + \alpha_s^2 \hat{\sigma}_2 + \alpha_s^3 \hat{\sigma}_3 + \dots$$

LO NLO NNLO N³LO

$\hat{\sigma}_2$



Double Virtual



Real Virtual



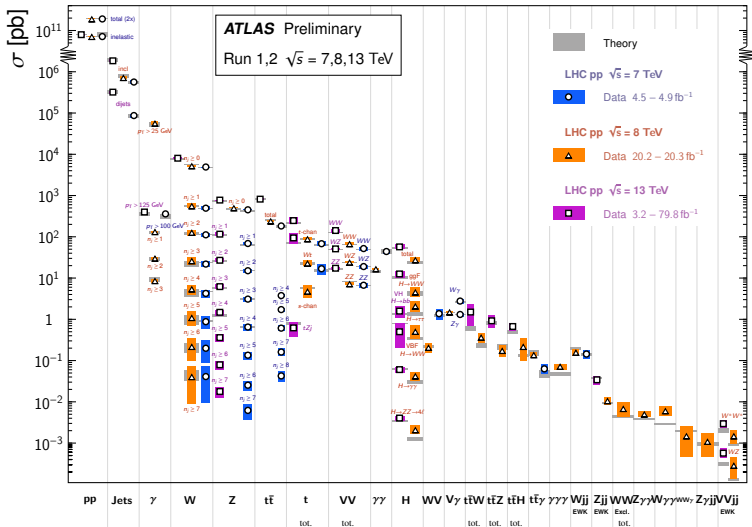
Double Real

$\hat{\sigma}_3$ ← Triple Virtual, Double Virtual - Real, Double Real - Virtual,
Real-Virtual Squared, Triple Real

標準模型@LHC

Standard Model Production Cross Section Measurements

Status: July 2018



NLO status

EWおよびQCD NLO補正の計算は完全自動化

- BlackHat+Sherpa
- FeynArts/FormCalc/LoopTools
- GRACE
- Gosam
- HELAC-NLO
- MCFM
- MadGolem
- MadGraph5_aMC@NLO
- OpenLoops+Sherpa
- POWHEG-Box
- Recola+Sherpa
- ...

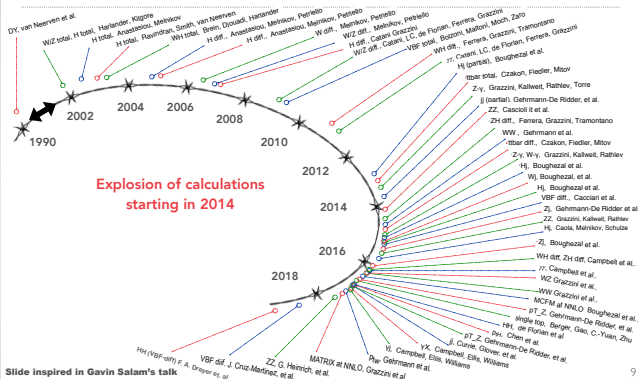
(in alphabetical order)

NNLO status

2 → 2過程に対するQCD NNLO補正はよく理解されている

THE NNLO STANDARD

NNLO HADRON-COLLIDER CALCULATIONS VS. TIME



2 → 3過程はまだまだ

2-loop 5pts
IR subtractions

$pp \rightarrow \gamma\gamma$:
Chawdhry et al.,
arXiv:1911.00479

massive internal lines

→ 楕円積分

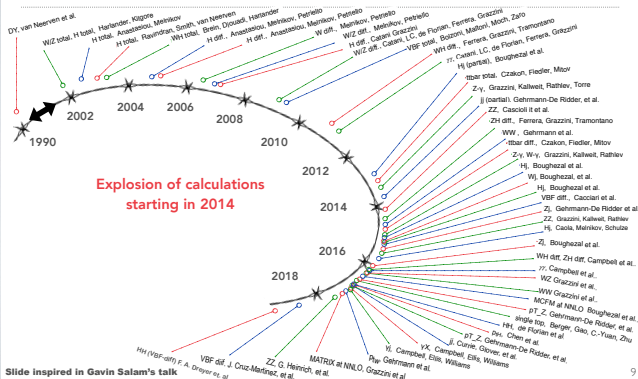
Elliptic generalisation of
multiple polylogarithms?

NNLO status

2 → 2過程に対するQCD NNLO補正はよく理解されている

THE NNLO STANDARD

NNLO HADRON-COLLIDER CALCULATIONS VS. TIME



2 → 3過程はまだまだ

2-loop 5pts
IR subtractions

$pp \rightarrow \gamma\gamma\gamma$:
Chawdhry *et al.*,
arXiv:1911.00479

massive internal lines

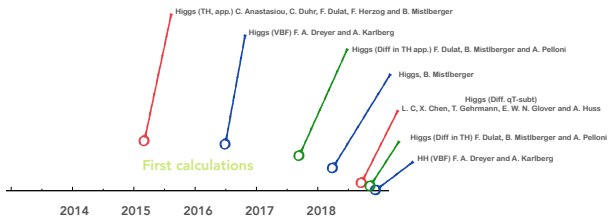
→ 楕円積分

Elliptic generalisation of
multiple polylogarithms?

N³LO status

THE N³LO ERA

N³LO HADRON-COLLIDER CALCULATIONS VS. TIME



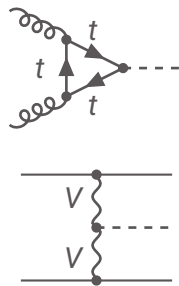
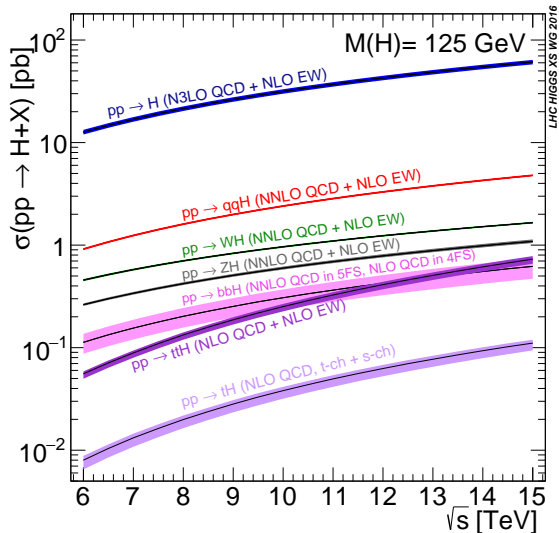
HL-LHC (14TeV 3ab⁻¹)
HE-LHC (27TeV 15ab⁻¹)
理論誤差を数%以内に!

Slide by Leandro Cieri, Moriond 2019

すべてヒッグス粒子生成過程

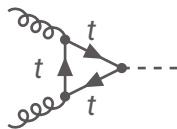
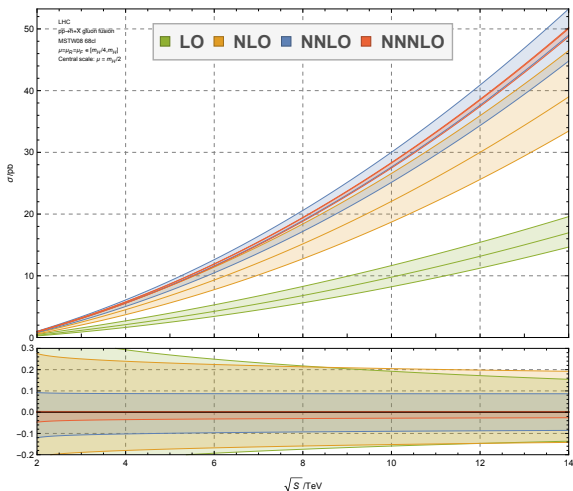
ヒッグス粒子生成@LHC

主にグルーオン・チャネルが効く



グルーオン融合過程 (N^3LO)

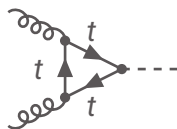
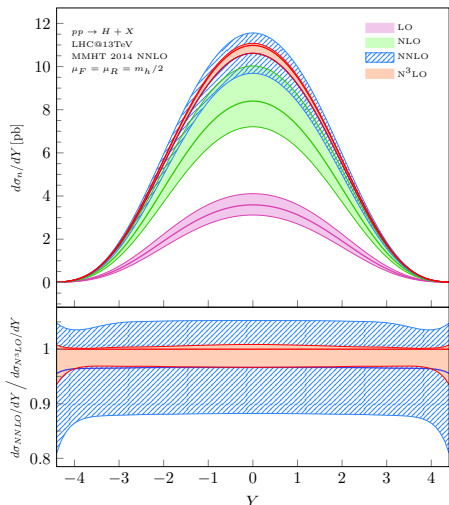
摂動の収束が遅いことで悪名高い



$$\frac{m_h^2}{m_t^2} \ll 1$$

グルーオン融合過程 (N³LO)

摂動の収束が遅いことで悪名高い



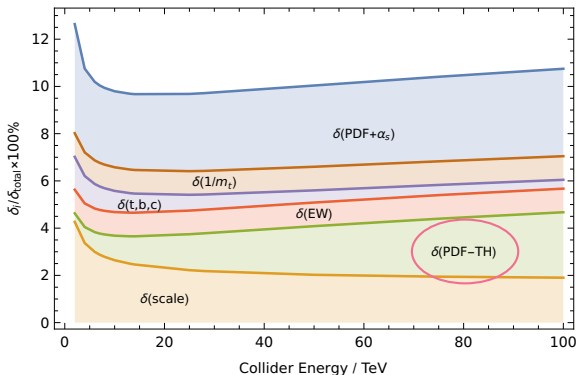
$$\frac{m_h^2}{m_t^2} \ll 1$$

See also:
Cieri et al., JHEP1902 (2019) 096,
arXiv:1807.11501

Missing N³LO PDFs

ところで、この計算結果は $\hat{\sigma}_{gg \rightarrow h+X}$ は N³LO で
PDFは NNLO → オーダーが合っていない!

$$\sigma_{pp \rightarrow h+X} = 48.68 \text{ pb} \begin{array}{l} +3.63 \text{ pb} (+7.46\%) \\ -4.72 \text{ pb} (-9.7\%) \end{array} \quad (\sqrt{s} = 13 \text{ TeV})$$

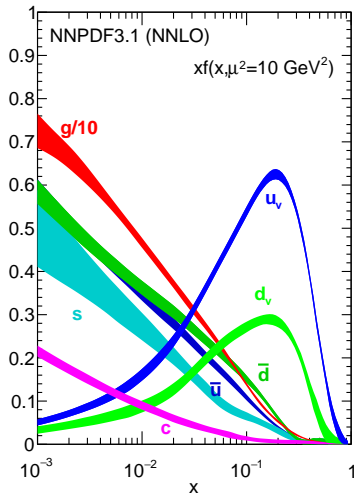


パートン分布関数

(非偏極) NNLO PDF sets

- MMHT
- NNPDF
- CT(EQ)
- HERAPDF
- ABMP
- JR

LHAPDFを通して利用可能
PDF4LHC15 recommendations



パートン分布関数

パートン分布関数 $f_i(x, Q^2)$ は実験データからのフィット

Q^2 依存性はDGLAP方程式による

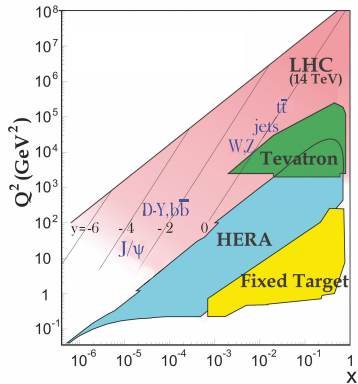
$$\frac{\partial f_i}{\partial \ln Q^2} = \sum_j P_{ij} \otimes f_j$$

P_{ij} : パートン j から i への分岐関数

DISの場合、構造関数 $F_2(x, Q^2)$ は

$$F_2 = \sum_i C_i^{(2)} \otimes f_i$$

$C_i^{(2)}$: ウィルソン係数関数



2019RPP Fig. 18.3

パートン分布関数

ウィルソン係数関数は**N³LO**(3ループ)まで知られている

Vermaseren, Vogt, Moch, NPB724 (2005) 3, arXiv:hep-ph/0504242

パートン分岐関数は**NNLO**(3ループ)まで

Moch, Vermaseren, Vogt, NPB688 (2004) 101, arXiv:hep-ph/0403192

Vogt, Moch, Vermaseren, NPB691 (2004) 129, arXiv:hep-ph/0404111

$$C = C^{(0)} + \alpha_s C^{(1)} + \alpha_s^2 C^{(2)} + \alpha_s^3 C^{(3)}$$

$$P = \alpha_s P^{(0)} + \alpha_s^2 P^{(1)} + \alpha_s^3 P^{(2)}$$

N³LOでパートン分布関数を得るには
パートン分岐関数も**N³LO**(4ループ)まで必要



パートン分岐関数の**QCD**高次補正

パートン分岐関数の計算

N -th Mellin moment:

$$\gamma_{ab}(N) = - \int_0^1 dx x^{N-1} P_{ab}(x)$$

N -依存性を持つ massless propagator-type
ファインマン積分の発散部分(後述)



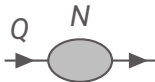
一般の N についての表式が得られれば
Mellin逆変換で P_{ab} が求まる
(4ループでは難しい...)

パートン分岐関数の計算

N -th Mellin moment:

$$\gamma_{ab}(N) = - \int_0^1 dx x^{N-1} P_{ab}(x)$$

N -依存性を持つ **massless propagator-type**
ファインマン積分の発散部分(後述)



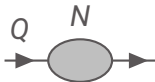
一般の N についての表式が得られれば
Mellin逆変換で P_{ab} が求まる
(4ループでは難しい...)

パートン分岐関数の計算

N -th Mellin moment:

$$\gamma_{ab}(N) = - \int_0^1 dx x^{N-1} P_{ab}(x)$$

N -依存性を持つ **massless propagator-type**
ファインマン積分の発散部分(後述)



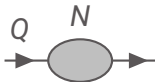
一般の N についての表式が得られれば
Mellin逆変換で P_{ab} が求まる
(4ループでは難しい...)

パートン分岐関数の計算

N -th Mellin moment:

$$\gamma_{ab}(N) = - \int_0^1 dx x^{N-1} P_{ab}(x)$$

N -依存性を持つ **massless propagator-type**
ファインマン積分の発散部分(後述)

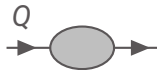


一般の N についての表式が得られれば
Mellin逆変換で P_{ab} が求まる
(4ループでは難しい...)

パートン分岐関数の計算

Fix $N = 2, 4, 6, \dots$

→ massless propagator-type
ファインマン積分



これはすでに4ループで解析的に
計算可能

Fixed $N = 2, 4, 6, \dots$ から
近似的に P_{ab} を構成する



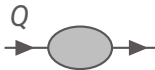
3ループでの例: exact vs. approx.
non-singlet, n_f -independent part

From Moch, Vermaseren, Vogt
NPB 688 (2004) 101,
arXiv:hep-ph/0403192

パートン分岐関数の計算

Fix $N = 2, 4, 6, \dots$

→ massless propagator-type
ファインマン積分



これはすでに4ループで解析的に
計算可能

Fixed $N = 2, 4, 6, \dots$ から
近似的に P_{ab} を構成する



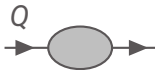
3ループでの例: exact vs. approx.
non-singlet, n_f -independent part

From Moch, Vermaseren, Vogt
NPB 688 (2004) 101,
arXiv:hep-ph/0403192

パートン分岐関数の計算

Fix $N = 2, 4, 6, \dots$

→ massless propagator-type
ファインマン積分



これはすでに4ループで解析的に
計算可能

Fixed $N = 2, 4, 6, \dots$ から
近似的に P_{ab} を構成する



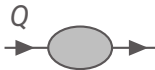
3ループでの例: exact vs. approx.
non-singlet, n_f -independent part

From Moch, Vermaseren, Vogt
NPB 688 (2004) 101,
arXiv:hep-ph/0403192

パートン分岐関数の計算

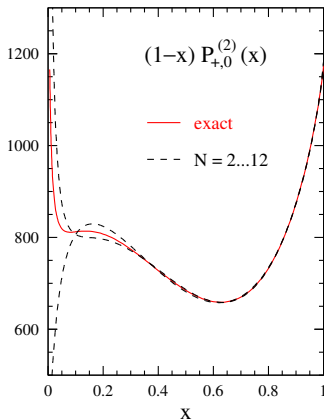
Fix $N = 2, 4, 6, \dots$

→ massless propagator-type
ファインマン積分



これはすでに4ループで解析的に
計算可能

Fixed $N = 2, 4, 6, \dots$ から
近似的に P_{ab} を構成する



3ループでの例: exact vs. approx.
non-singlet, n_f -independent part

From Moch, Vermaseren, Vogt
NPB 688 (2004) 101,
arXiv:hep-ph/0403192

Feynman integral calculus

- (1) ファインマン・ダイアグラムを生成する
- (2) 対応する数式に変換する。ループは積分になる
- (3) テンソル積分をスカラー積分に分解する (e.g., Passarino-Veltman)

この時点で、非常に多くの積分の線形和になっている

- (3) マスター積分の和に簡約化する (次頁) e.g., $1\text{万} - \mathcal{O}(10)$
- (4) マスター積分を評価する

Feynman integral calculus

- (1) ファインマン・ダイアグラムを生成する
- (2) 対応する数式に変換する。ループは積分になる
- (3) テンソル積分をスカラー積分に分解する (e.g., Passarino-Veltman)

この時点で、非常に多くの積分の線形和になっている

- (3) マスター積分の和に簡約化する (次頁) e.g., 1万 \rightarrow $\mathcal{O}(10)$
- (4) マスター積分を評価する

Feynman integral calculus

- (1) ファインマン・ダイアグラムを生成する
- (2) 対応する数式に変換する。ループは積分になる
- (3) テンソル積分をスカラー積分に分解する (e.g., Passarino-Veltman)

この時点で、非常に多くの積分の線形和になっている

- (3) マスター積分の和に簡約化する ← ボトルネック!
- (4) マスター積分を評価する

IBP関係式

Integration-by-parts (IBP) 関係式 Chetyrkin, Tkachov '81
 D 次元での発散定理

$$\int d^D k \frac{\partial}{\partial k^\mu} f^\mu = 0$$

ループ積分間の関係式を与える

うまく使うと効果大

例: 2-loop massless scalar self-energy ($D = 4 - 2\epsilon$)

$$\text{Diagram} = \frac{1}{\epsilon} \left[\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \right] \sim 6\zeta(3)$$

左辺を直接計算するには GPXT (Gegenbauer polynomial x-space technique)等が必要
(今時ならMellin-Barnes積分表示や linear reducibility (HyperInt)とか)
右辺は教科書レベル

IBP関係式

Integration-by-parts (IBP) 関係式 Chetyrkin, Tkachov '81
 D 次元での発散定理

$$\int d^D k \frac{\partial}{\partial k^\mu} f^\mu = 0$$

ループ積分間の関係式を与える

うまく使うと効果大

例: 2-loop massless scalar self-energy ($D = 4 - 2\epsilon$)

$$\text{Diagram} = \frac{1}{\epsilon} \left[\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \right] \sim 6\zeta(3)$$

左辺を直接計算するには GPXT (Gegenbauer polynomial x-space technique)等が必要
(今時ならMellin-Barnes積分表示や linear reducibility (HyperInt)とか)
右辺は教科書レベル

IBP関係式

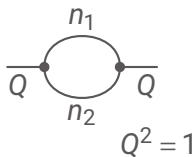
Integration-by-parts (IBP) 関係式 Chetyrkin, Tkachov '81
 D 次元での発散定理

$$\int d^D k \frac{\partial}{\partial k^\mu} f^\mu = 0$$

ループ積分間の関係式を与える

もう少し具体的な例: 1-loop massless scalar self-energy

$$F(n_1, n_2) = \int d^D p \frac{1}{(p^2)^{n_1} [(Q-p)^2]^{n_2}}$$



$$(D - 2n_1 - n_2)F(n_1, n_2) - n_2 F(n_1 - 1, n_2 + 1) + n_2 F(n_1, n_2 + 1) = 0$$

$$(D - n_1 - 2n_2)F(n_1, n_2) - n_1 F(n_1 + 1, n_2 - 1) + n_1 F(n_1 + 1, n_2) = 0$$

パラメトリックな簡約化ルール

IBP関係式を(手で)「解く」

$$F(n_1, n_2) = -\frac{(D - n_1 - n_2)(D - 2n_1 - 2n_2 + 2)}{(n_1 - 1)(D - 2n_1)} F(n_1 - 1, n_2)$$

$$F(n_1, n_2) = -\frac{(D - n_1 - n_2)(D - 2n_1 - 2n_2 + 2)}{(n_2 - 1)(D - 2n_2)} F(n_1, n_2 - 1)$$

このルールを繰り返し適用すると「難しい」積分を「簡単な」マスター積分に簡約化することができる

$$F(3, 3) = \frac{1}{4}(D - 3)(D - 5)(D - 8)(D - 10)F(1, 1)$$

パラメトリックな簡約化ルール

IBP関係式を(手で)「解く」

$$F(n_1, n_2) = -\frac{(D - n_1 - n_2)(D - 2n_1 - 2n_2 + 2)}{(n_1 - 1)(D - 2n_1)} F(n_1 - 1, n_2)$$

$$F(n_1, n_2) = -\frac{(D - n_1 - n_2)(D - 2n_1 - 2n_2 + 2)}{(n_2 - 1)(D - 2n_2)} F(n_1, n_2 - 1)$$

このルールを繰り返し適用すると「難しい」積分を「簡単な」マスター積分に簡約化することができる

$$F(3, 3) = \frac{1}{4}(D - 3)(D - 5)(D - 8)(D - 10)F(1, 1)$$

Laporta アルゴリズム

順序付けに基づいたガウスの消去法 Laporta '00

(1) 具体的に n_1 と n_2 を代入して十分な数の等式を生成

$$(n_1, n_2) = (3, 2): \quad -2F(2, 3) + 2F(3, 3) + (D - 8)F(3, 2) = 0 \quad -3F(4, 1) + 3F(4, 2) + (D - 7)F(3, 2) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (3, 1): \quad -F(2, 2) + F(3, 2) + (D - 7)F(3, 1) = 0 \quad -3F(4, 0) + 3F(4, 1) + (D - 5)F(3, 1) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (2, 2): \quad -2F(1, 3) + 2F(2, 3) + (D - 6)F(2, 2) = 0 \quad -2F(3, 1) + 2F(3, 2) + (D - 6)F(2, 2) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (2, 1): \quad -F(1, 2) + F(2, 2) + (D - 5)F(2, 1) = 0 \quad -2F(3, 0) + 2F(3, 1) + (D - 4)F(2, 1) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (1, 2): \quad -2F(0, 3) + 2F(1, 3) + (D - 4)F(1, 2) = 0 \quad -F(2, 1) + F(2, 2) + (D - 5)F(1, 2) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (1, 1): \quad -F(0, 2) + F(1, 2) + (D - 3)F(1, 1) = 0 \quad -F(2, 0) + F(2, 1) + (D - 3)F(1, 1) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (0, 3): \quad -3F(-1, 4) + 3F(0, 4) + (D - 3)F(0, 3) = 0 \quad (D - 6)F(0, 3) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (0, 2): \quad -2F(-1, 3) + 2F(0, 3) + (D - 2)F(0, 2) = 0 \quad (D - 4)F(0, 2) = 0$$

(2) 個々の積分 ($F(1, 1), F(1, 2), F(2, 1), \dots$) をそれぞれ変数とした
大規模線形系 \rightarrow 「難しい」積分を消去

$$F(3, 3) = \frac{1}{4}(D - 3)(D - 5)(D - 8)(D - 10)F(1, 1)$$

計算機上で自動化しやすい (高次補正計算によく使われる)

Laporta アルゴリズム

順序付けに基づいたガウスの消去法 Laporta '00

(1) 具体的に n_1 と n_2 を代入して十分な数の等式を生成

$$(n_1, n_2) = (3, 2): \quad -2F(2, 3) + 2F(3, 3) + (D - 8)F(3, 2) = 0 \quad -3F(4, 1) + 3F(4, 2) + (D - 7)F(3, 2) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (3, 1): \quad -F(2, 2) + F(3, 2) + (D - 7)F(3, 1) = 0 \quad -3F(4, 0) + 3F(4, 1) + (D - 5)F(3, 1) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (2, 2): \quad -2F(1, 3) + 2F(2, 3) + (D - 6)F(2, 2) = 0 \quad -2F(3, 1) + 2F(3, 2) + (D - 6)F(2, 2) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (2, 1): \quad -F(1, 2) + F(2, 2) + (D - 5)F(2, 1) = 0 \quad -2F(3, 0) + 2F(3, 1) + (D - 4)F(2, 1) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (1, 2): \quad -2F(0, 3) + 2F(1, 3) + (D - 4)F(1, 2) = 0 \quad -F(2, 1) + F(2, 2) + (D - 5)F(1, 2) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (1, 1): \quad -F(0, 2) + F(1, 2) + (D - 3)F(1, 1) = 0 \quad -F(2, 0) + F(2, 1) + (D - 3)F(1, 1) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (0, 3): \quad -3F(-1, 4) + 3F(0, 4) + (D - 3)F(0, 3) = 0 \quad (D - 6)F(0, 3) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (0, 2): \quad -2F(-1, 3) + 2F(0, 3) + (D - 2)F(0, 2) = 0 \quad (D - 4)F(0, 2) = 0$$

(2) 個々の積分 ($F(1, 1), F(1, 2), F(2, 1), \dots$) をそれぞれ変数とした
大規模線形系 \rightarrow 「難しい」積分を消去

$$F(3, 3) = \frac{1}{4}(D - 3)(D - 5)(D - 8)(D - 10)F(1, 1)$$

計算機上で自動化しやすい (高次補正計算によく使われる)

Laporta アルゴリズム

順序付けに基づいたガウスの消去法 Laporta '00

(1) 具体的に n_1 と n_2 を代入して十分な数の等式を生成

$$(n_1, n_2) = (3, 2): \quad -2F(2, 3) + 2F(3, 3) + (D - 8)F(3, 2) = 0 \quad -3F(4, 1) + 3F(4, 2) + (D - 7)F(3, 2) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (3, 1): \quad -F(2, 2) + F(3, 2) + (D - 7)F(3, 1) = 0 \quad -3F(4, 0) + 3F(4, 1) + (D - 5)F(3, 1) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (2, 2): \quad -2F(1, 3) + 2F(2, 3) + (D - 6)F(2, 2) = 0 \quad -2F(3, 1) + 2F(3, 2) + (D - 6)F(2, 2) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (2, 1): \quad -F(1, 2) + F(2, 2) + (D - 5)F(2, 1) = 0 \quad -2F(3, 0) + 2F(3, 1) + (D - 4)F(2, 1) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (1, 2): \quad -2F(0, 3) + 2F(1, 3) + (D - 4)F(1, 2) = 0 \quad -F(2, 1) + F(2, 2) + (D - 5)F(1, 2) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (1, 1): \quad -F(0, 2) + F(1, 2) + (D - 3)F(1, 1) = 0 \quad -F(2, 0) + F(2, 1) + (D - 3)F(1, 1) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (0, 3): \quad -3F(-1, 4) + 3F(0, 4) + (D - 3)F(0, 3) = 0 \quad (D - 6)F(0, 3) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (0, 2): \quad -2F(-1, 3) + 2F(0, 3) + (D - 2)F(0, 2) = 0 \quad (D - 4)F(0, 2) = 0$$

(2) 個々の積分 ($F(1, 1)$, $F(1, 2)$, $F(2, 1)$, ...) をそれぞれ変数とした
大規模線形系 → 「難しい」積分を消去

$$F(3, 3) = \frac{1}{4}(D - 3)(D - 5)(D - 8)(D - 10)F(1, 1)$$

計算機上で自動化しやすい (高次補正計算によく使われる)

Laporta アルゴリズム

順序付けに基づいたガウスの消去法 Laporta '00

(1) 具体的に n_1 と n_2 を代入して十分な数の等式を生成

$$(n_1, n_2) = (3, 2): \quad -2F(2, 3) + 2F(3, 3) + (D-8)F(3, 2) = 0 \quad -3F(4, 1) + 3F(4, 2) + (D-7)F(3, 2) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (3, 1): \quad -F(2, 2) + F(3, 2) + (D-7)F(3, 1) = 0 \quad -3F(4, 0) + 3F(4, 1) + (D-5)F(3, 1) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (2, 2): \quad -2F(1, 3) + 2F(2, 3) + (D-6)F(2, 2) = 0 \quad -2F(3, 1) + 2F(3, 2) + (D-6)F(2, 2) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (2, 1): \quad -F(1, 2) + F(2, 2) + (D-5)F(2, 1) = 0 \quad -2F(3, 0) + 2F(3, 1) + (D-4)F(2, 1) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (1, 2): \quad -2F(0, 3) + 2F(1, 3) + (D-4)F(1, 2) = 0 \quad -F(2, 1) + F(2, 2) + (D-5)F(1, 2) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (1, 1): \quad -F(0, 2) + F(1, 2) + (D-3)F(1, 1) = 0 \quad -F(2, 0) + F(2, 1) + (D-3)F(1, 1) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (0, 3): \quad -3F(-1, 4) + 3F(0, 4) + (D-3)F(0, 3) = 0 \quad (D-6)F(0, 3) = 0$$

$$(n_1, n_2) = (0, 2): \quad -2F(-1, 3) + 2F(0, 3) + (D-2)F(0, 2) = 0 \quad (D-4)F(0, 2) = 0$$

(2) 個々の積分 ($F(1, 1)$, $F(1, 2)$, $F(2, 1)$, ...) をそれぞれ変数とした
大規模線形系 → 「難しい」積分を消去

$$F(3, 3) = \frac{1}{4}(D-3)(D-5)(D-8)(D-10)F(1, 1)$$

計算機上で自動化しやすい (高次補正計算によく使われる)

IBP solvers and tools



AIR (Automatic Integral Reduction)

Anastasiou, Lazopoulos '04



FIRE (Feynman Integral REDuction)

Chukharev, Smirnov² '08-



ICE (IBP Chooser of Equations)

Kant '13



AZURITE (A ZURich-bred method for finding master INTEgrals)

Georgoudis, Larsen, Zhang '16

Reduze von Manteuffel, Studerus '09-

Kira Maierhöfer, Usovitsch, Uwer '17-

TopID Hoff, Pak (open source)

LiteRed Lee '12

FireFly Klappert, Lange '19

and many private tools...

4-loop IBP reduction?

$$\begin{aligned} & (D-n_1-n_4-2n_8-n_9-n_{11})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (-n_1)F(n_1+1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8-1, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (-n_3)F(n_1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8-1, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (-n_3)F(n_1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9-1, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (-n_3)F(n_1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}-1, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (-n_3)F(n_1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}-1, n_{14}) + (-n_4)F(n_1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6, n_7, n_8-1, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (-n_4)F(n_1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}-1, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (-n_4)F(n_1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}-1, n_{14}) \\ & + (-n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4-1, n_5+1, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (-n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5+1, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}-1, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (-n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5+1, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}-1, n_{14}) + (-n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8-1, n_9+1, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (-n_{11})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8-1, n_9, n_{10}, n_{11}+1, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (-n_{11})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}+1, n_{12}, n_{13}-1, n_{14}) \\ & + (-n_{12})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}-1, n_{12}+1, n_{13}, n_{14}) + (-n_{12})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}+1, n_{13}-1, n_{14}) \\ & + (-n_{14})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8-1, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}+1) + (-n_{14})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}+1) \\ & + (n_1)F(n_1+1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (n_3)F(n_1-1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_3)F(n_1, n_2-1, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (n_3)F(n_1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7-1, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_4)F(n_1-1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (n_4)F(n_1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6-1, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_4)F(n_1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}-1, n_{13}, n_{14}) + (n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5+1, n_6-1, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5+1, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}-1, n_{13}, n_{14}) + (n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5+1, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_9)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7-1, n_8, n_9+1, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (n_{11})F(n_1, n_2-1, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}+1, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_{11})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}+1, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (n_{12})F(n_1-1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}+1, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_{12})F(n_1, n_2-1, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}+1, n_{13}, n_{14}) + (n_{14})F(n_1-1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}+1) \\ & = 0 \end{aligned}$$

+ other 19 IBPs

Laporta(もしくは他の一般的な)アルゴリズム: 遅過ぎ 😞
パラメトリックに手で解く: 不可能 ☹️

4-loop IBP reduction?

$$\begin{aligned} & (D-n_1-n_4-2n_8-n_9-n_{11})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (-n_1)F(n_1+1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8-1, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (-n_3)F(n_1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8-1, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (-n_3)F(n_1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9-1, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (-n_3)F(n_1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}-1, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (-n_3)F(n_1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}-1, n_{14}) + (-n_4)F(n_1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6, n_7, n_8-1, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (-n_4)F(n_1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}-1, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (-n_4)F(n_1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}-1, n_{14}) \\ & + (-n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4-1, n_5+1, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (-n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5+1, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}-1, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (-n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5+1, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}-1, n_{14}) + (-n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8-1, n_9+1, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (-n_{11})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8-1, n_9, n_{10}, n_{11}+1, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (-n_{11})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}+1, n_{12}, n_{13}-1, n_{14}) \\ & + (-n_{12})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}-1, n_{12}+1, n_{13}, n_{14}) + (-n_{12})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}+1, n_{13}-1, n_{14}) \\ & + (-n_{14})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8-1, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}+1) + (-n_{14})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}+1) \\ & + (n_1)F(n_1+1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (n_3)F(n_1-1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_3)F(n_1, n_2-1, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (n_3)F(n_1, n_2, n_3+1, n_4, n_5, n_6, n_7-1, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_4)F(n_1-1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (n_4)F(n_1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6-1, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_4)F(n_1, n_2, n_3, n_4+1, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}-1, n_{13}, n_{14}) + (n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5+1, n_6-1, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5+1, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}-1, n_{13}, n_{14}) + (n_5)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5+1, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_9)F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7-1, n_8, n_9+1, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (n_{11})F(n_1, n_2-1, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}+1, n_{12}, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_{11})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}+1, n_{12}, n_{13}, n_{14}) + (n_{12})F(n_1-1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}+1, n_{13}, n_{14}) \\ & + (n_{12})F(n_1, n_2-1, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}+1, n_{13}, n_{14}) + (n_{14})F(n_1-1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}+1) \\ & = 0 \end{aligned}$$

+ other 19 IBPs

Laporta(もしくは他の一般的な)アルゴリズム: 遅過ぎ ☹
パラメトリックに手で解く: 不可能 ☹☹

The FORCER program

4ループmassless propagator-type (scalar)ループ積分を
解析的に評価するFORMプログラム

Ruijl, TU, Vermaseren '17; Works with FORM 4.2: Ruijl, TU, Vermaseren '17

基本的に(3ループ) Mincer の4ループへの拡張

Chetyrkin, Tkachov '81;

Schoonschip version: Gorishny, Larin, Surguladze, Tkachov '89;

FORM version: Larin, Tkachov, Vermaseren '91

トポロジーによってone-loop insertion integrationや
triangle ruleを適用して簡単なトポロジーに帰着させる



Chetyrkin, Kataev, Tkachov '80;
Chetyrkin, Tkachov '81



Chetyrkin, Tkachov '81;

Diamond extension: Ruijl, TU, Vermaseren '15

The FORCER program

4ループmassless propagator-type (scalar)ループ積分を
解析的に評価するFORMプログラム

Ruijl, TU, Vermaseren '17; Works with FORM 4.2: Ruijl, TU, Vermaseren '17

基本的に(3ループ) Mincer の4ループへの拡張

Chetyrkin, Tkachov '81;

Schoonschip version: Gorishny, Larin, Surguladze, Tkachov '89;

FORM version: Larin, Tkachov, Vermaseren '91

トポロジーによってone-loop insertion integrationや
triangle ruleを適用して簡単なトポロジーに帰着させる



Chetyrkin, Kataev, Tkachov '80;
Chetyrkin, Tkachov '81



Chetyrkin, Tkachov '81;

Diamond extension: Ruijl, TU, Vermaseren '15

The FORCER program

4ループmassless propagator-type (scalar)ループ積分を
解析的に評価するFORMプログラム

Ruijl, TU, Vermaseren '17; Works with FORM 4.2: Ruijl, TU, Vermaseren '17

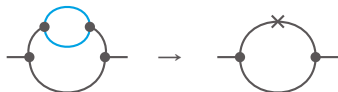
基本的に(3ループ) Mincer の4ループへの拡張

Chetyrkin, Tkachov '81;

Schoonschip version: Gorishny, Larin, Surguladze, Tkachov '89;

FORM version: Larin, Tkachov, Vermaseren '91

トポロジーによってone-loop insertion integrationや
triangle ruleを適用して簡単なトポロジーに帰着させる



Chetyrkin, Kataev, Tkachov '80;
Chetyrkin, Tkachov '81



Chetyrkin, Tkachov '81;
Diamond extension: Ruijl, TU, Vermaseren '15

The FORCER program

4ループmassless propagator-type (scalar)ループ積分を
解析的に評価するFORMプログラム

Ruijl, TU, Vermaseren '17; Works with FORM 4.2: Ruijl, TU, Vermaseren '17

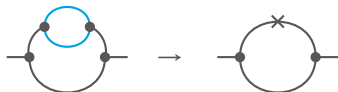
基本的に(3ループ) Mincer の4ループへの拡張

Chetyrkin, Tkachov '81;

Schoonschip version: Gorishny, Larin, Surguladze, Tkachov '89;

FORM version: Larin, Tkachov, Vermaseren '91

トポロジーによってone-loop insertion integrationや
triangle ruleを適用して簡単なトポロジーに帰着させる



Chetyrkin, Kataev, Tkachov '80;
Chetyrkin, Tkachov '81

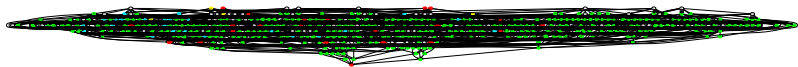


Chetyrkin, Tkachov '81;

Diamond extension: Ruijl, TU, Vermaseren '15

4-loop reduction flowchart

現れるすべてのトポロジーを分類



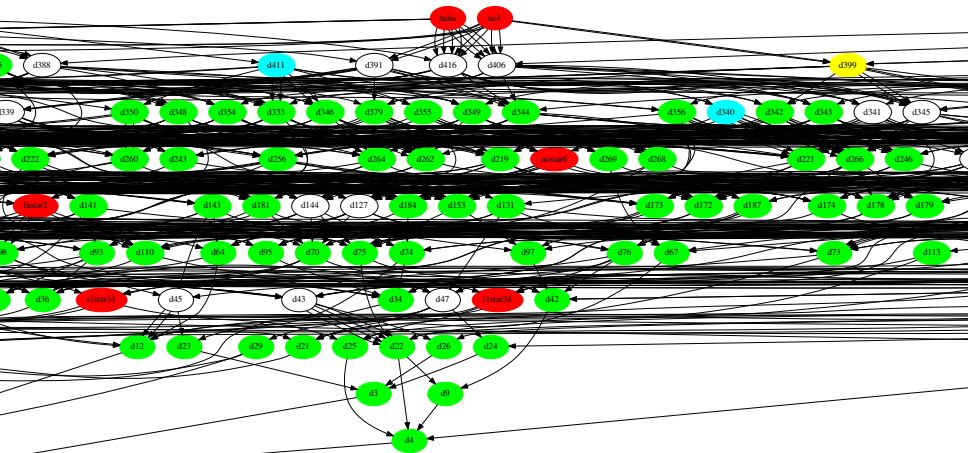
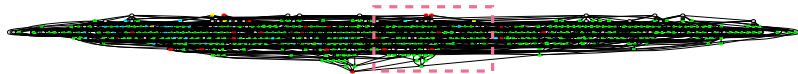
437のうち416のトポロジーはone-loop integrationやtriangle rule等が適用可能

残りはIBPを使って「解いた」

上のフローチャートをもとに手でプログラムに書くのは無理
2794行のPythonプログラムによって39406行のFORMプログラムを自動生成 (そもそも上のフローチャートもPythonプログラムが生成したもの)

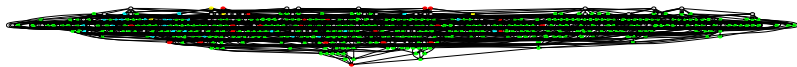
4-loop reduction flowchart

現れるすべてのトポロジーを分類



4-loop reduction flowchart

現れるすべてのトポロジーを分類



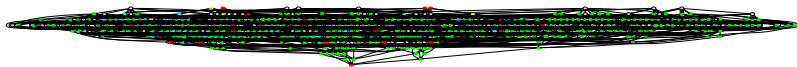
437のうち416のトポロジーはone-loop integrationやtriangle rule等が適用可能

残りはIBPを使って「解いた」

上のフローチャートをもとに手でプログラムに書くのは無理
2794行のPythonプログラムによって39406行のFORMプログラムを自動生成 (そもそも上のフローチャートもPythonプログラムが生成したもの)

4-loop reduction flowchart

現れるすべてのトポロジーを分類



437のうち416のトポロジーはone-loop integrationやtriangle rule等が適用可能

残りはIBPを使って「解いた」

上のフローチャートをもとに手でプログラムに書くのは無理
2794行のPythonプログラムによって39406行のFORMプログラムを自動生成 (そもそも上のフローチャートもPythonプログラムが生成したもの)

May the FORCER be with you

FORCER: 4ループまでのmassless propagator-type scalar
ファインマン積分を解析的に行うFORMプログラム

<https://github.com/benruijl/forcer>

Ruijl, TU, Vermaseren '17

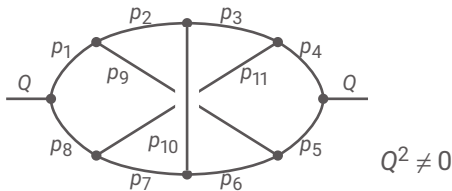
May the FORCER be with you

FORCER: 4ループまでのmassless propagator-type scalar
ファインマン積分を解析的に行うFORMプログラム

<https://github.com/benruijl/forcer>

Ruijl, TU, Vermaseren '17

Example:



$$\int d^D p_1 d^D p_2 d^D p_3 d^D p_4 \frac{(2Q \cdot p_2)^{-n_{12}} (2p_1 \cdot p_4)^{-n_{13}} (2Q \cdot p_3)^{-n_{14}}}{(p_1^2)^{n_1} \dots (p_{11}^2)^{n_{11}}}$$

$(n_1, \dots, n_{11}$: integers, n_{12}, \dots, n_{14} : non-positive integers)

マスター積分(MI)への簡約化を行い、 ϵ でローラン展開 ($D = 4 - 2\epsilon$)

MIs all known: Baikov, Chetyrkin '10; Lee, Smirnov, Smirnov '11

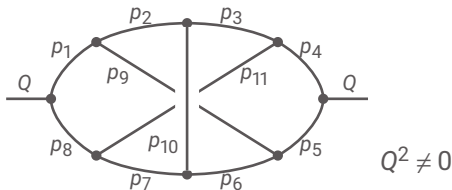
May the FORCER be with you

FORCER: 4ループまでのmassless propagator-type scalar
ファインマン積分を解析的に行うFORMプログラム

<https://github.com/benruijl/forcer>

Ruijl, TU, Vermaseren '17

Example:



$$\int d^D p_1 d^D p_2 d^D p_3 d^D p_4 \frac{(2Q \cdot p_2)^{-n_{12}} (2p_1 \cdot p_4)^{-n_{13}} (2Q \cdot p_3)^{-n_{14}}}{(p_1^2)^{n_1} \dots (p_{11}^2)^{n_{11}}}$$

$(n_1, \dots, n_{11}: \text{integers}, n_{12}, \dots, n_{14}: \text{non-positive integers})$

マスター積分(MI)への簡約化を行い、 ϵ でローラン展開 ($D = 4 - 2\epsilon$)

MI's all known: Baikov, Chetyrkin '10; Lee, Smirnov, Smirnov '11

May the FORCER be with you

FORCER: 4ループまでのmassless propagator-type scalar
ファインマン積分を解析的に行うFORMプログラム

<https://github.com/benruijl/forcer>

Ruijl, TU, Vermaseren '17

Applications include:

- 4-loop QCD propagators and vertices
Ruijl, TU, Vermaseren, Vogt '17
- 4-loop SM β funcs.
Davies, Herren, Poole,
Steinhauser, Thomsen '19
- 4-loop QCD splitting functions
Davies, Vogt, Ruijl, TU, Vermaseren '16;
Moch, Ruijl, TU, Vermaseren, Vogt '17, '18

FORCER + IRR (5ループのUV発散を4ループ有限項で書き直す):

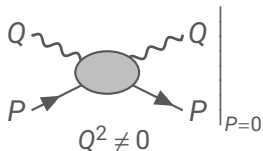
- 5-loop QCD β func.
Herzog, Ruijl, TU, Vermaseren, Vogt '17;
Chetyrkin, Falcioni, Herzog, Vermaseren '17
- 5-loop Higgs decay to gluons
Herzog, Ruijl, TU, Vermaseren, Vogt '17
- 5-loop anomalous dims.
Herzog, Moch, Ruijl, TU, Vermaseren, Vogt '18
- 2- and 3-loop anomalous dims. of Weinberg op.
de Vries, Falcioni, Herzog, Ruijl '19

方法1: forward scattering amplitude

Harmonic projection to
probe-parton forward scattering

Gorishnii, Larin, Tkachev '83; Gorishnii, Larin '87

$$\frac{Q^{\{\mu_1 \dots \mu_N\}}}{N!} \frac{\partial^N}{\partial P^{\mu_1} \dots \partial P^{\mu_N}}$$



Setupが簡単 😊

Nが大きくなると計算時間が急増 😞

N = 4まで: 既知の結果を確認

Velizhanin '11 '14; Baikov, Chetyrkin, Kühn, Ritinger

N = 6まで計算

cf. Davies, Ruijl, TU, Vermaseren, Vogt

NPB915 (2017) 335, arXiv:1610.07477 for large n_f

(*ここでは flavor non-singlet (NS) quark part について考えます)

$\gamma_{NS}^{(3)+}$: even N
 $\gamma_{NS}^{(3)-}$: odd N

Method I

SU(3), $n_f = 4$

expansion in α_s

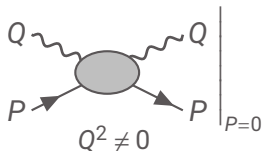
N

方法1: forward scattering amplitude

Harmonic projection to
probe-parton forward scattering

Gorishnii, Larin, Tkachev '83; Gorishnii, Larin '87

$$\frac{Q^{\{\mu_1 \dots \mu_N\}}}{N!} \frac{\partial^N}{\partial P^{\mu_1} \dots \partial P^{\mu_N}}$$



Setupが簡単 😊

Nが大きくなると計算時間が急増 😞

N = 4まで: 既知の結果を確認

Velizhanin '11 '14; Baikov, Chetyrkin, Kühn, Ritinger

N = 6まで計算

cf. Davies, Ruijl, TU, Vermaseren, Vogt

NPB915 (2017) 335, arXiv:1610.07477 for large n_f

(*ここでは flavor non-singlet (NS) quark part について考えます)

$$\gamma_{NS}^{(3)+} : \text{even } N$$
$$\gamma_{NS}^{(3)-} : \text{odd } N$$

Method I

SU(3), $n_f = 4$

expansion in α_s

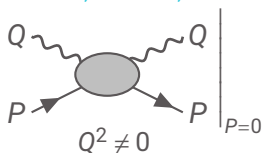
N

方法1: forward scattering amplitude

Harmonic projection to
probe-parton forward scattering

Gorishnii, Larin, Tkachev '83; Gorishnii, Larin '87

$$\frac{Q^{\{\mu_1 \dots \mu_N\}}}{N!} \frac{\partial^N}{\partial P^{\mu_1} \dots \partial P^{\mu_N}}$$



Setupが簡単 😊

N が大きくなると計算時間が急増 😞

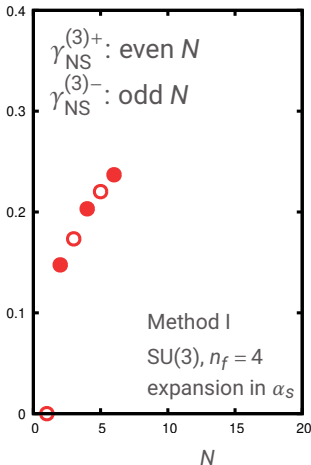
$N = 4$ まで: 既知の結果を確認

Velizanin '11 '14; Baikov, Chetyrkin, Kühn, Ritinger

$N = 6$ まで計算

cf. Davies, Ruijl, TU, Vermaseren, Vogt

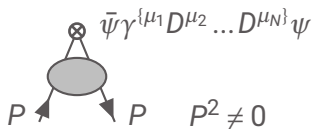
NPB915 (2017) 335, arXiv:1610.07477 for large n_f



(*ここでは flavor non-singlet (NS) quark part について考えます)

方法2: operator matrix elements

Matrix elements of twist-2 DIS operators



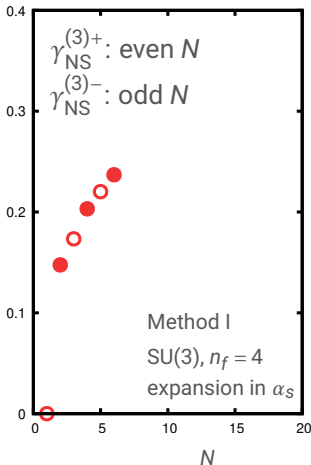
計算時間の増加が緩やか 😊

Setupに難 (ファインマン則/繰り込み) 😞

$N=6$ まで: 方法1の結果を確認

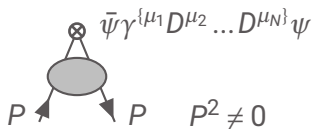
これによって方法2が正しく
プログラムされていることを
チェック

$N=16$ まで計算



方法2: operator matrix elements

Matrix elements of twist-2 DIS operators



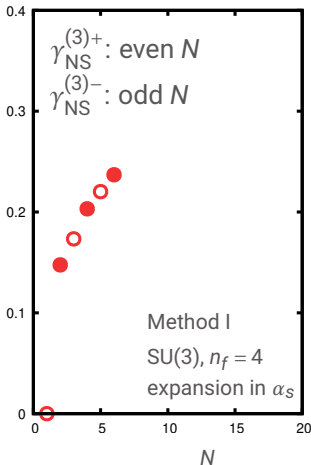
計算時間の増加が緩やか 😊

Setupに難 (ファインマン則/繰り込み) 😞

$N=6$ まで: 方法1の結果を確認

これによって方法2が正しく
プログラムされていることを
チェック

$N=16$ まで計算



方法2: operator matrix elements

Matrix elements of twist-2 DIS operators

$$\bar{\psi} \gamma^{\{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_N\} \psi$$

P P $P^2 \neq 0$

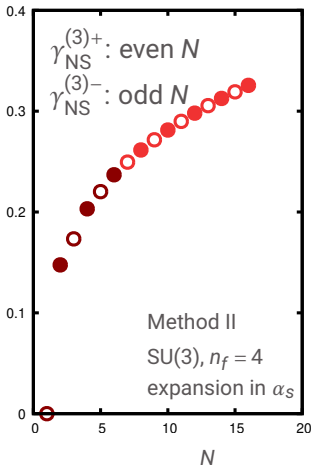
計算時間の増加が緩やか 😊

Setupに難 (ファインマン則/繰り込み) 😞

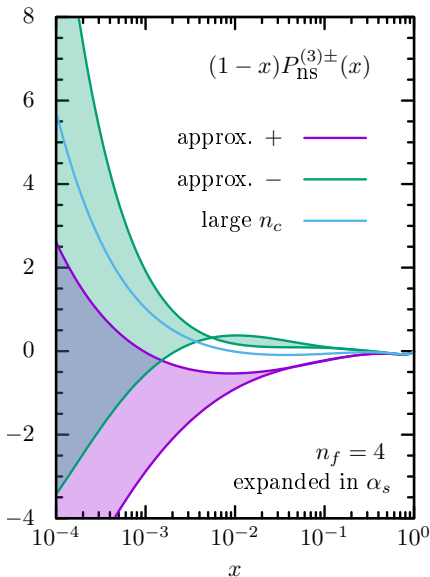
$N=6$ まで: 方法1の結果を確認

これによって方法2が正しく
プログラムされていることを
チェック

$N=16$ まで計算



N^3 LO NS splitting functions



$$P = \alpha_s P^{(0)} + \alpha_s^2 P^{(1)} + \alpha_s^3 P^{(2)} + \alpha_s^4 P^{(3)} + \dots$$

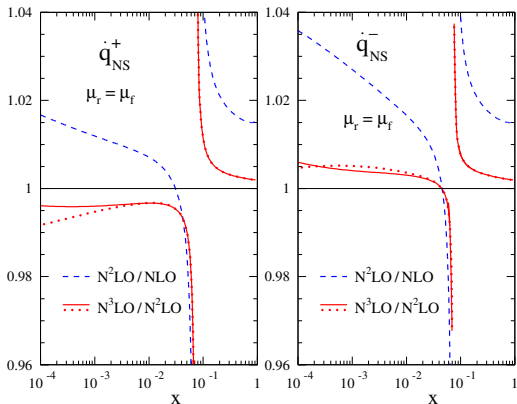
Large- n_c part: analytically reconstructed
Rest: approximation

q_{NS}^{\pm} evolution: NNLO vs N³LO

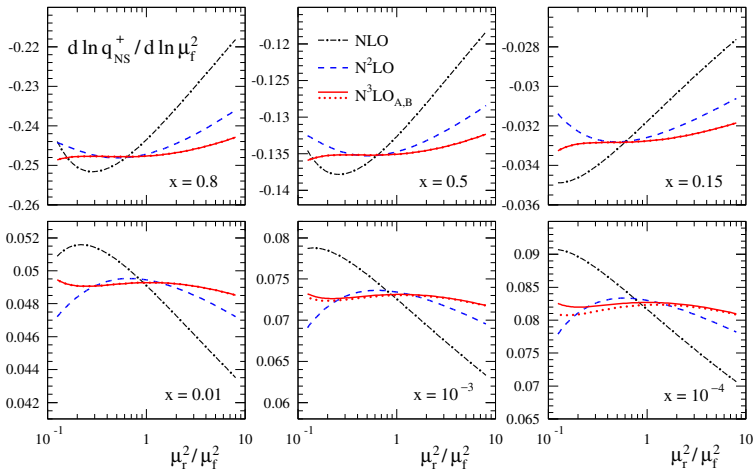
Logarithmic derivatives w.r.t. the factorization scale

$$\dot{q} \equiv \frac{d \ln q}{d \ln \mu_f^2}$$

Reference input: $xq(x, \mu_0^2) = x^{0.5}(1-x)^3$ with $\alpha_s(\mu_0^2) = 0.2, n_f = 4$



q_{NS}^+ evolution: renormalization scale dependence



N³LO: stable

scale uncertainty below 1% for $\mu_f/2 \leq \mu_r \leq 2\mu_f$

まとめ

まとめ

将来のHL-LHCやHE-LHCでの精密測定
理論誤差も数%以内に収める必要

パートン分布関数は誤差の一因
 N^3 LO PDFの必要性

N^3 LOパートン分岐関数

- フレーバー非一重項(non-singlet):
現象論的利用に耐えうる精度の近似
- フレーバー一重項(singlet):
まだ不完全、work in progress...

cf. S. Moch, B. Ruijl, TU, J.A.M. Vermaseren, A. Vogt, PLB782 (2018) 627,
arXiv:1805.09638

まとめ

将来のHL-LHCやHE-LHCでの精密測定
理論誤差も数%以内に収める必要

パートン分布関数は誤差の一因
 N^3 LO PDFの必要性

N^3 LOパートン分岐関数

- フレーバー非一重項(non-singlet):
現象論的利用に耐えうる精度の近似
- フレーバー一重項(singlet):
まだ不完全、work in progress...

cf. S. Moch, B. Ruijl, TU, J.A.M. Vermaseren, A. Vogt, PLB782 (2018) 627,
arXiv:1805.09638

Backup

Parton evolutions

$q_i(x, \mu^2)$, $\bar{q}_i(x, \mu^2)$ and $g(x, \mu^2)$ for massless quarks, antiquarks of flavour i and gluons

2 n_f (anti-)quark distributions decomposed as

- $q_{ns,ik}^\pm = (q_i \pm \bar{q}_i) - (q_k \pm \bar{q}_k)$,
flavour non-singlet, $2(n_f - 1)$ components,
evolving with P_{ns}^\pm
- $q_{ns}^V = \sum_{i=1}^{n_f} (q_i - \bar{q}_i)$: flavour non-singlet (“valence”), evolving
with $P_{ns}^V = P_{ns}^- + P_{ns}^S$
- $q_s = \sum_{i=1}^{n_f} (q_i + \bar{q}_i)$: flavour singlet,
mixing with gluons. $P_{qq} = P_{ns}^+ + P_{ps}$

$$\frac{d}{d \ln \mu_f^2} \begin{pmatrix} q_s \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{qq} & P_{qg} \\ P_{gq} & P_{gg} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_s \\ g \end{pmatrix}$$

Restoring scale dependence

$L \equiv \ln(\mu_r^2/\mu_f^2) \neq 0$, from $L = 0$ results:

$$\gamma_{\text{ns}}^{(0)}(L) = \gamma_{\text{ns}}^{(0)}$$

$$\gamma_{\text{ns}}^{(1)}(L) = \gamma_{\text{ns}}^{(1)} + \beta_0 L \gamma_{\text{ns}}^{(0)}$$

$$\gamma_{\text{ns}}^{(2)}(L) = \gamma_{\text{ns}}^{(2)} + 2\beta_0 L \gamma_{\text{ns}}^{(1)} + (\beta_1 L + \beta_0^2 L^2) \gamma_{\text{ns}}^{(0)}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{ns}}^{(3)}(L) = & \gamma_{\text{ns}}^{(3)} + 3\beta_0 L \gamma_{\text{ns}}^{(2)} + (2\beta_1 L + 3\beta_0^2 L^2) \gamma_{\text{ns}}^{(1)} \\ & + \left(\beta_2 L + \frac{5}{2} \beta_1 \beta_0 L^2 + \beta_0^3 L^3 \right) \gamma_{\text{ns}}^{(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{ns}}^{(4)}(L) = & \gamma_{\text{ns}}^{(4)} + 4\beta_0 L \gamma_{\text{ns}}^{(3)} + (3\beta_1 L + 6\beta_0^2 L^2) \gamma_{\text{ns}}^{(2)} \\ & + (2\beta_2 L + 7\beta_1 \beta_0 L^2 + 4\beta_0^3 L^3) \gamma_{\text{ns}}^{(1)} \\ & + \left(\beta_3 L + 3\beta_2 \beta_0 L^2 + \frac{3}{2} \beta_1^2 L^2 + \frac{13}{3} \beta_1 \beta_0^2 L^3 + \beta_0^4 L^4 \right) \gamma_{\text{ns}}^{(0)} \end{aligned}$$

Reconstructing full- N expression

Non-singlet, large- n_c part: computed up to $N = 20$

$$\gamma_{NS}^{\pm}(N): (q_i \pm \bar{q}_i) - (q_k \pm \bar{q}_k)$$

Ansatz: if analogous to lower orders

$$\gamma_{NS}^{(n)}(N) = \sum_{w=0}^{2n+1} c_{00w} S_w(N) + \sum_a \sum_{k=1}^{2n+1} \sum_{w=0}^{2n+1-k} c_{akw} \frac{S_w(N)}{(N+a)^k}$$

γ_{NS} : constrained by 'self-tuning' (conjecture, conformal symmetry)

$\gamma_{NS}^+ = \gamma_{NS}^-$ for large- n_c

Large- N and small- x limits ($N \rightarrow \infty$ and $N \rightarrow 0$)

Small- x resummation: known coefficients

Dokshitzer, Marchesini '06;
Basso, Korchemsky '06; ...
Dokshitzer, Marchesini,
Salam '05, ...

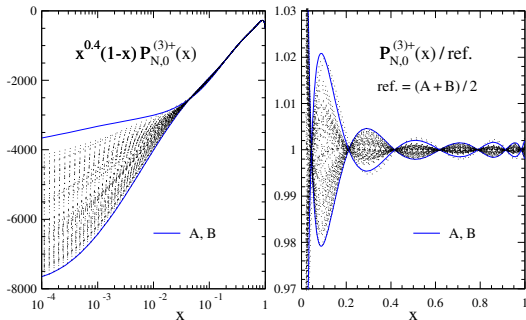
$N \leq 18$ Diophantine eqs. to fix remaining coefficients

Checked by $N = 19, 20$

Approximation for remaining terms

Non-singlet, remaining large- n_c suppressed terms

90 resulting trial functions, parameters fixed from the first 8 moments, two representatives chosen that indicate the remaining uncertainty

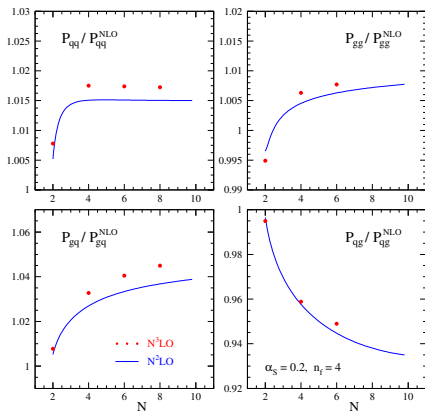


Checked by the 9th moment, e.g., $P_{N,1}^{+(3)}(N=18)$:
 $195.8888792_B < 195.8888857 \dots \text{exact} < 195.8888968_A$

Singlet status

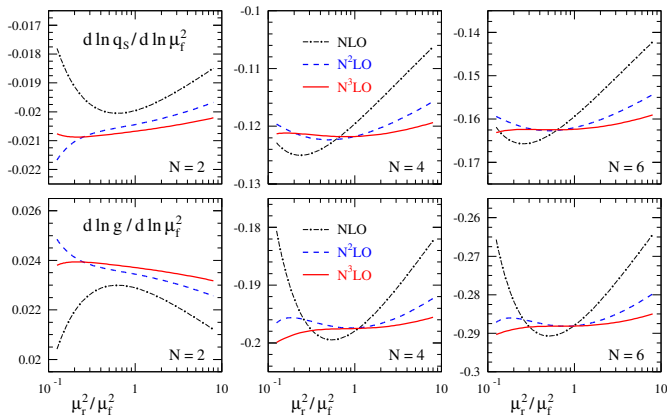
In general, computed up to

$N = 8$ for $\gamma_{qq}^{(3)}$, $\gamma_{gq}^{(3)}$ and $N = 6$ for $\gamma_{qg}^{(3)}$, $\gamma_{gg}^{(3)}$ by Method I



N^3 LO corrections
in N -space
relative to NLO
 $\alpha_S = 0.2, n_f = 4$

$q_s(N)$ and $g(N)$ evolution: μ -dependence



Reference input: $xq_s(x, \mu_0^2) = 0.6x^{-0.3}(1-x)^{3.5}(1+5.0x^{0.8})$

$xg_s(x, \mu_0^2) = 1.6x^{-0.3}(1-x)^{4.5}(1-0.6x^{0.3})$ with $\alpha_s(\mu_0^2) = 0.2, n_f = 4$

5-loop result: $\gamma_{ns}^{(4)+} (N=2)$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{ns}^{(4)+} (N=2) = & C_F \frac{d_{FA}^{(4)}}{N_F} \left(+ \frac{23968}{81} + \frac{77056}{9} \zeta_7 + \frac{176320}{81} \zeta_5 - \frac{733504}{81} \zeta_3 + \frac{6400}{3} \zeta_3^2 \right) + C_F \frac{d_{AA}^{(4)}}{N_A} \left(- \frac{15344}{81} + \frac{19040}{9} \zeta_7 - \frac{58400}{27} \zeta_5 + \frac{704}{3} \zeta_4 + \frac{12064}{27} \zeta_3 + \frac{6016}{3} \zeta_3^2 \right) + C_F^S \left(\right. \\
 & + \frac{9306376}{19683} + 8512 \zeta_7 - \frac{557440}{81} \zeta_5 - \frac{802784}{729} \zeta_3 + \frac{12544}{9} \zeta_3^2 \Big) + C_A \frac{d_{FA}^{(4)}}{N_F} \left(- \frac{82768}{81} - 12768 \zeta_7 - \frac{140800}{27} \zeta_6 + \frac{1292960}{81} \zeta_5 - \frac{10912}{9} \zeta_4 + \frac{555520}{81} \zeta_3 - \frac{84352}{27} \zeta_3^2 \right) + C_A C_F^4 \left(\right. \\
 & - \frac{81862744}{19683} - 19936 \zeta_7 + \frac{35200}{9} \zeta_6 + \frac{142240}{27} \zeta_5 - \frac{59840}{81} \zeta_4 + \frac{1600592}{243} \zeta_3 - 3072 \zeta_3^2 \Big) + C_A^2 C_F^3 \left(+ \frac{63340406}{6561} + 15680 \zeta_7 - \frac{35200}{9} \zeta_6 + \frac{61696}{27} \zeta_5 - \frac{229472}{81} \zeta_4 \right. \\
 & - \frac{1003192}{243} \zeta_3 + \frac{30976}{9} \zeta_3^2 \Big) + C_A^3 C_F^2 \left(- \frac{220224724}{19683} - \frac{331856}{27} \zeta_7 - \frac{123200}{27} \zeta_6 + \frac{3640624}{243} \zeta_5 + \frac{170968}{27} \zeta_4 - \frac{4115536}{729} \zeta_3 - \frac{70400}{27} \zeta_3^2 \right) + C_A^4 C_F \left(+ \frac{266532611}{39366} \right. \\
 & + \frac{178976}{27} \zeta_7 + \frac{334400}{81} \zeta_6 - \frac{3102208}{243} \zeta_5 - \frac{221920}{81} \zeta_4 + \frac{2588144}{729} \zeta_3 + \frac{74912}{81} \zeta_3^2 \Big) + n_f \frac{d_{FA}^{(4)}}{N_F} \left(+ \frac{22096}{27} - 2464 \zeta_7 + \frac{25600}{27} \zeta_6 - \frac{217280}{81} \zeta_5 - \frac{512}{9} \zeta_4 + \frac{43712}{81} \zeta_3 \right. \\
 & - \frac{25088}{27} \zeta_3^2 \Big) + n_f C_F \frac{d_{FF}^{(4)}}{N_F} \left(- \frac{170752}{81} + \frac{35840}{9} \zeta_7 - \frac{650240}{81} \zeta_5 + \frac{328832}{81} \zeta_3 + \frac{8192}{9} \zeta_3^2 \right) + n_f C_F^4 \left(+ \frac{1824964}{19683} + \frac{8960}{3} \zeta_7 - \frac{6400}{9} \zeta_6 - \frac{16480}{81} \zeta_5 + \frac{21248}{81} \zeta_4 - \frac{463520}{243} \zeta_3 \right. \\
 & + \frac{6656}{9} \zeta_3^2 \Big) + n_f C_A \frac{d_{FF}^{(4)}}{N_F} \left(+ \frac{207824}{81} - \frac{29120}{9} \zeta_7 + \frac{70400}{27} \zeta_6 - \frac{522880}{81} \zeta_5 - \frac{5632}{9} \zeta_4 + \frac{251392}{81} \zeta_3 + \frac{15872}{27} \zeta_3^2 \right) + n_f C_A C_F^3 \left(- \frac{3375082}{6561} - \frac{4480}{3} \zeta_7 + \frac{8000}{3} \zeta_6 \right. \\
 & - \frac{458032}{81} \zeta_5 + \frac{48256}{81} \zeta_4 + \frac{420068}{243} \zeta_3 - \frac{3968}{3} \zeta_3^2 \Big) + n_f C_A^2 C_F^2 \left(+ \frac{15291499}{13122} + \frac{11200}{27} \zeta_7 + \frac{13600}{27} \zeta_6 - \frac{252544}{243} \zeta_5 - \frac{114536}{27} \zeta_4 + \frac{1561600}{243} \zeta_3 + \frac{24896}{27} \zeta_3^2 \right) + n_f C_A^3 C_F \left(\right. \\
 & - \frac{48846580}{19683} - \frac{39088}{27} \zeta_7 - \frac{184000}{81} \zeta_6 + \frac{1389080}{243} \zeta_5 + \frac{274768}{81} \zeta_4 - \frac{4314308}{729} \zeta_3 - \frac{27808}{81} \zeta_3^2 \Big) + n_f^2 \frac{d_{FF}^{(4)}}{N_F} \left(- \frac{43744}{81} - \frac{12800}{27} \zeta_6 + \frac{52480}{81} \zeta_5 + \frac{1792}{9} \zeta_4 + \frac{35648}{81} \zeta_3 \right. \\
 & - \frac{2048}{27} \zeta_3^2 \Big) + n_f^2 C_F^3 \left(+ \frac{1082297}{6561} - \frac{3200}{9} \zeta_6 + \frac{55552}{81} \zeta_5 + \frac{1072}{81} \zeta_4 - \frac{145792}{243} \zeta_3 + \frac{1792}{9} \zeta_3^2 \right) + n_f^2 C_A C_F^2 \left(+ \frac{332254}{2187} + \frac{1600}{27} \zeta_6 - \frac{28544}{81} \zeta_5 + \frac{20752}{27} \zeta_4 - \frac{85016}{243} \zeta_3 \right. \\
 & - \frac{13952}{27} \zeta_3^2 \Big) + n_f^2 C_A^2 C_F \left(+ \frac{631400}{6561} + \frac{22400}{81} \zeta_6 - \frac{53344}{243} \zeta_5 - 784 \zeta_4 + \frac{214268}{243} \zeta_3 + \frac{25472}{81} \zeta_3^2 \right) + n_f^3 C_F^2 \left(+ \frac{265510}{19683} + \frac{512}{27} \zeta_5 - \frac{128}{3} \zeta_4 + \frac{11872}{729} \zeta_3 \right) + n_f^3 C_A C_F \left(+ \frac{168677}{19683} \right. \\
 & - \frac{4096}{81} \zeta_5 + \frac{2752}{81} \zeta_4 + \frac{11872}{729} \zeta_3 \Big) + n_f^4 C_F \left(- \frac{5504}{19683} + \frac{128}{81} \zeta_4 - \frac{1024}{729} \zeta_3 \right)
 \end{aligned}$$

5-loop result: $\gamma_{ns}^{(4)-} (N=3)$

$$\begin{aligned}
\gamma_{ns}^{(4)-} (N=3) = & C_F \frac{d_{FA}^{(4)}}{N_F} \left(-\frac{231575}{36} + \frac{200410}{9} \zeta_7 + \frac{2927225}{162} \zeta_5 - \frac{6351445}{324} \zeta_3 - \frac{23210}{3} \zeta_3^2 \right) + C_F \frac{d_{AA}^{(4)}}{N_A} \left(-\frac{81725}{162} + \frac{48125}{36} \zeta_7 - \frac{52025}{18} \zeta_5 + \frac{1100}{3} \zeta_4 + \frac{33505}{18} \zeta_3 + \frac{7000}{3} \zeta_3^2 \right) \\
& + C_F^2 \left(\frac{81472935625}{80621568} + \frac{34685}{2} \zeta_7 - \frac{3395975}{162} \zeta_5 + \frac{99382175}{23328} \zeta_3 - \frac{9650}{9} \zeta_3^2 \right) + C_A \frac{d_{FA}^{(4)}}{N_F} \left(\frac{165871}{54} - \frac{7525}{4} \zeta_7 + \frac{200750}{27} \zeta_6 - \frac{4456145}{162} \zeta_5 - \frac{41800}{9} \zeta_4 + \frac{1816625}{162} \zeta_3 \right. \\
& \left. + \frac{196880}{27} \zeta_3^2 \right) + C_A C_F^4 \left(-\frac{286028134219}{80621568} - \frac{155155}{4} \zeta_7 + \frac{55000}{9} \zeta_6 + \frac{2468075}{108} \zeta_5 - \frac{134090}{81} \zeta_4 + \frac{23916529}{7776} \zeta_3 + 4490 \zeta_3^2 \right) + C_A^2 C_F^3 \left(\frac{20173099267}{3359232} + \frac{139895}{4} \zeta_7 \right. \\
& \left. - \frac{79750}{9} \zeta_6 + \frac{1972075}{216} \zeta_5 + \frac{732787}{1296} \zeta_4 - \frac{15401281}{864} \zeta_3 - \frac{63830}{9} \zeta_3^2 \right) + C_A^3 C_F^2 \left(-\frac{166662991819}{20155392} - \frac{2127335}{108} \zeta_7 + \frac{72875}{54} \zeta_6 - \frac{30994565}{3888} \zeta_5 + \frac{103763}{54} \zeta_4 + \frac{36397493}{2916} \zeta_3 \right. \\
& \left. + \frac{133990}{27} \zeta_3^2 \right) + C_A^4 C_F \left(\frac{75932079965}{10077696} + \frac{199640}{27} \zeta_7 + \frac{163625}{81} \zeta_6 - \frac{9417425}{1944} \zeta_5 - \frac{1791229}{1296} \zeta_4 - \frac{27693563}{23328} \zeta_3 - \frac{96700}{81} \zeta_3^2 \right) + n_f \frac{d_{FA}^{(4)}}{N_F} \left(\frac{297889}{162} - 910 \zeta_7 - \frac{36500}{27} \zeta_6 \right. \\
& \left. - \frac{122780}{81} \zeta_5 + \frac{3700}{9} \zeta_4 + \frac{154970}{81} \zeta_3 - \frac{62600}{27} \zeta_3^2 \right) + n_f C_F \frac{d_{FF}^{(4)}}{N_F} \left(-\frac{24385}{27} + \frac{135380}{9} \zeta_7 - \frac{1622600}{81} \zeta_5 + \frac{334010}{81} \zeta_3 + \frac{8480}{9} \zeta_3^2 \right) + n_f C_F^4 \left(\frac{1776521549}{40310784} + \frac{14000}{3} \zeta_7 \right. \\
& \left. - \frac{10000}{9} \zeta_6 - \frac{30325}{81} \zeta_5 + \frac{33290}{81} \zeta_4 - \frac{1332919}{486} \zeta_3 + \frac{5000}{9} \zeta_3^2 \right) + n_f C_A \frac{d_{FF}^{(4)}}{N_F} \left(\frac{241835}{162} - \frac{71960}{9} \zeta_7 + \frac{110000}{27} \zeta_6 - \frac{316900}{81} \zeta_5 - \frac{10780}{9} \zeta_4 + \frac{333487}{81} \zeta_3 + \frac{30560}{27} \zeta_3^2 \right) \\
& + n_f C_A C_F^2 \left(\frac{3737356319}{3359232} - \frac{7000}{3} \zeta_7 + \frac{14000}{3} \zeta_6 - \frac{1693715}{162} \zeta_5 - \frac{262069}{648} \zeta_4 + \frac{2327111}{432} \zeta_3 - \frac{1280}{3} \zeta_3^2 \right) + n_f C_A^2 C_F^2 \left(\frac{5637513931}{3359232} + \frac{50155}{108} \zeta_7 - \frac{20375}{27} \zeta_6 + \frac{508820}{243} \zeta_5 \right. \\
& \left. - \frac{457499}{108} \zeta_4 + \frac{2711207}{486} \zeta_3 - \frac{5020}{27} \zeta_3^2 \right) + n_f C_A^3 C_F \left(-\frac{8766012215}{2519424} - \frac{250915}{108} \zeta_7 - \frac{222250}{81} \zeta_6 + \frac{1808870}{243} \zeta_5 + \frac{2848403}{648} \zeta_4 - \frac{45697231}{5832} \zeta_3 - \frac{1195}{81} \zeta_3^2 \right) + n_f^2 \frac{d_{FF}^{(4)}}{N_F} \left(\right. \\
& \left. - \frac{19435}{27} - \frac{20000}{27} \zeta_6 + \frac{70000}{81} \zeta_5 + \frac{3160}{9} \zeta_4 + \frac{53366}{81} \zeta_3 - \frac{3200}{27} \zeta_3^2 \right) + n_f^2 C_F^3 \left(\frac{512848319}{1679616} - \frac{5000}{9} \zeta_6 + \frac{86440}{81} \zeta_5 + \frac{9118}{81} \zeta_4 - \frac{57109}{54} \zeta_3 + \frac{2800}{9} \zeta_3^2 \right) + n_f^2 C_A C_F^2 \left(\right. \\
& \left. + \frac{1080083}{5832} + \frac{2500}{27} \zeta_6 - \frac{42860}{81} \zeta_5 + \frac{56327}{54} \zeta_4 - \frac{296729}{972} \zeta_3 - \frac{21800}{27} \zeta_3^2 \right) + n_f^2 C_A^2 C_F \left(\frac{61747877}{419904} + \frac{35000}{81} \zeta_6 - \frac{88990}{243} \zeta_5 - \frac{3503}{3} \zeta_4 + \frac{2496811}{1944} \zeta_3 + \frac{39800}{81} \zeta_3^2 \right) \\
& + n_f^3 C_F^2 \left(\frac{28758139}{1259712} + \frac{800}{27} \zeta_5 - \frac{610}{9} \zeta_4 + \frac{21673}{729} \zeta_3 \right) + n_f^3 C_A C_F \left(\frac{13729181}{1259712} - \frac{6400}{81} \zeta_5 + \frac{4390}{81} \zeta_4 + \frac{14947}{729} \zeta_3 \right) + n_f^4 C_F \left(-\frac{259993}{629856} + \frac{200}{81} \zeta_4 - \frac{1660}{729} \zeta_3 \right)
\end{aligned}$$