

# 相対論的複素スカラー場の熱力学的性質に対する 化学ポテンシャル勾配からの影響の解析

三浦大輝（新潟大/原子核理論D1）

共同研究者：本郷優（新潟大/原子核理論）

2023年9月7日 ～中性子星の観測と理論～研究活性化ワークショップ @京都大学

# 目次

1. イントロダクション
2. アウトライン
3. 外場中の虚時間形式の場の理論
4. まとめと展望

# 目次

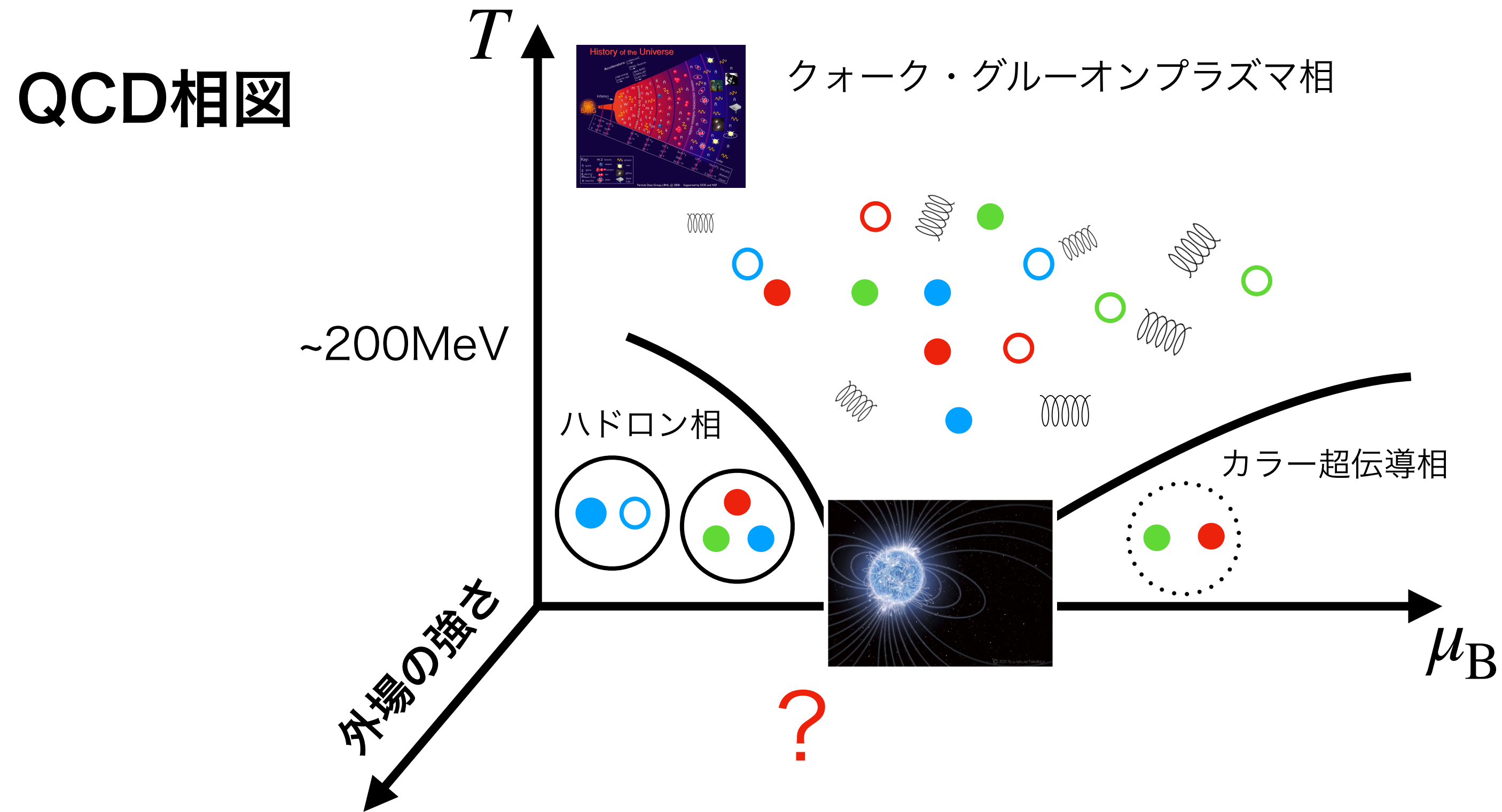
1.イントロダクション

2.アウトライン

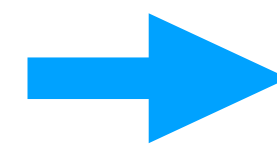
3.外場中の虚時間形式の場の理論

4.まとめと展望

# イントロダクション



重イオン衝突：強い電磁場  
中性子星：強い電磁場+重力場



外場中の場の理論

外場の存在により空間的に非一様になった量子多体系の熱力学的性質の解析

# イントロダクション



## 一様系の平衡統計力学

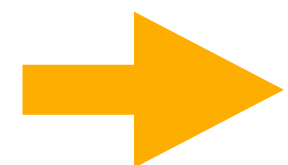
e.g.) 自由複素スカラー場

$$\Omega(\beta, \mu) = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \omega_k + \frac{1}{\beta} \ln \left( 1 - e^{-\beta(\omega_k + \mu)} \right) + \frac{1}{\beta} \ln \left( 1 - e^{-\beta(\omega_k - \mu)} \right) \right]$$



## (場の理論に基づいた)非一様系の平衡統計力学

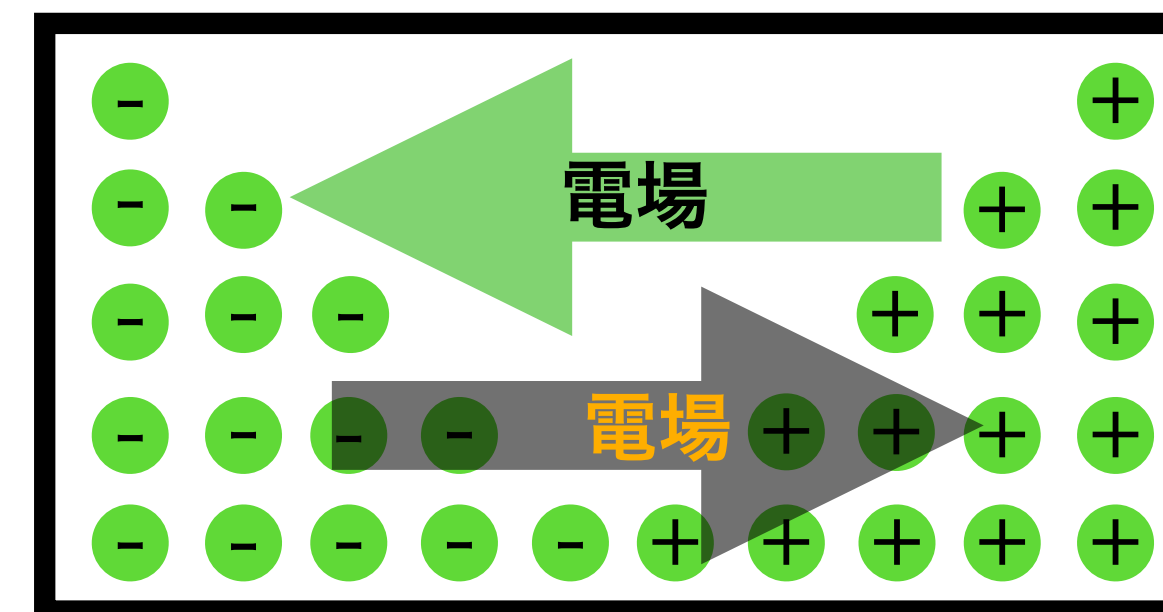
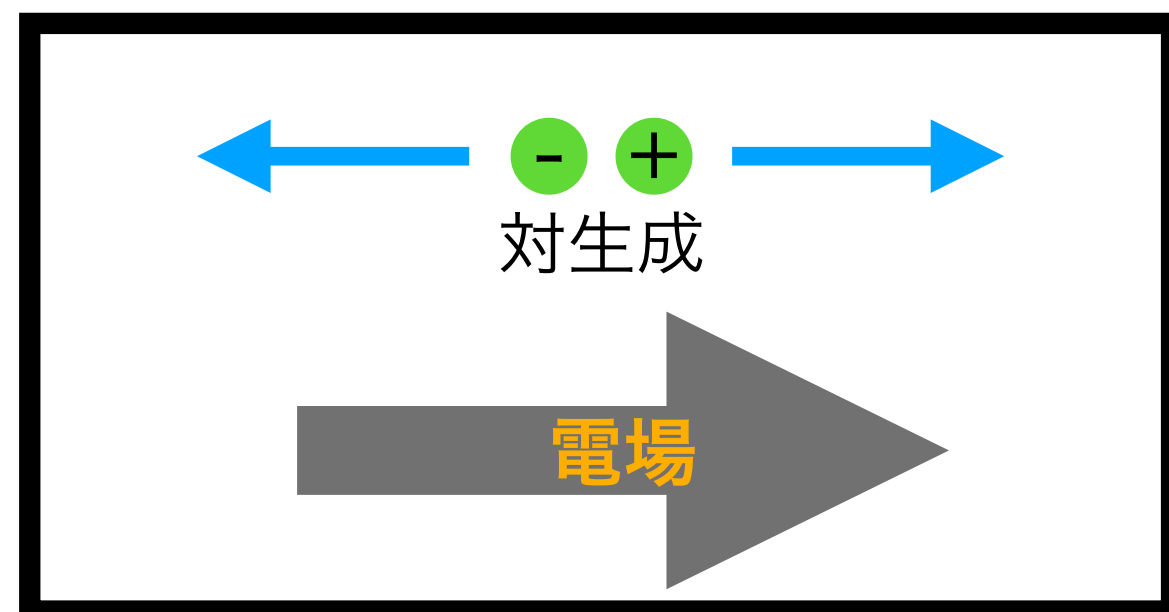
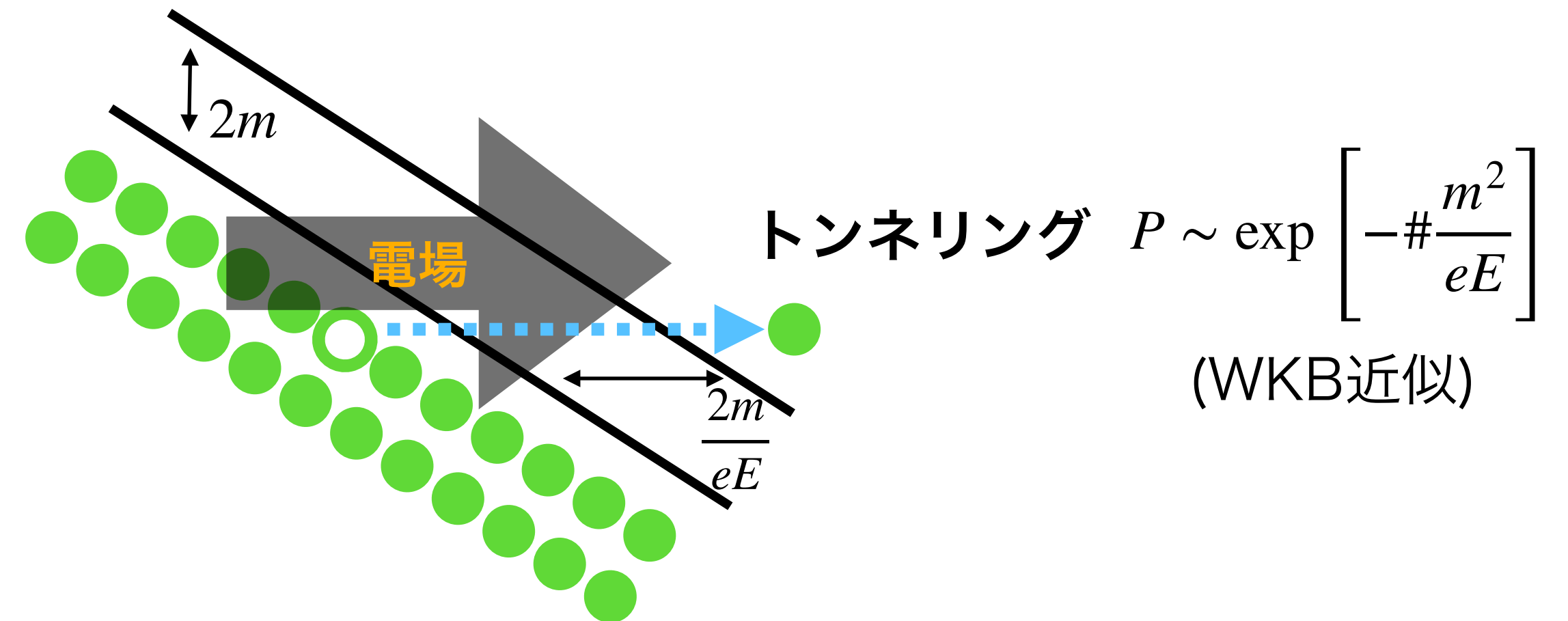
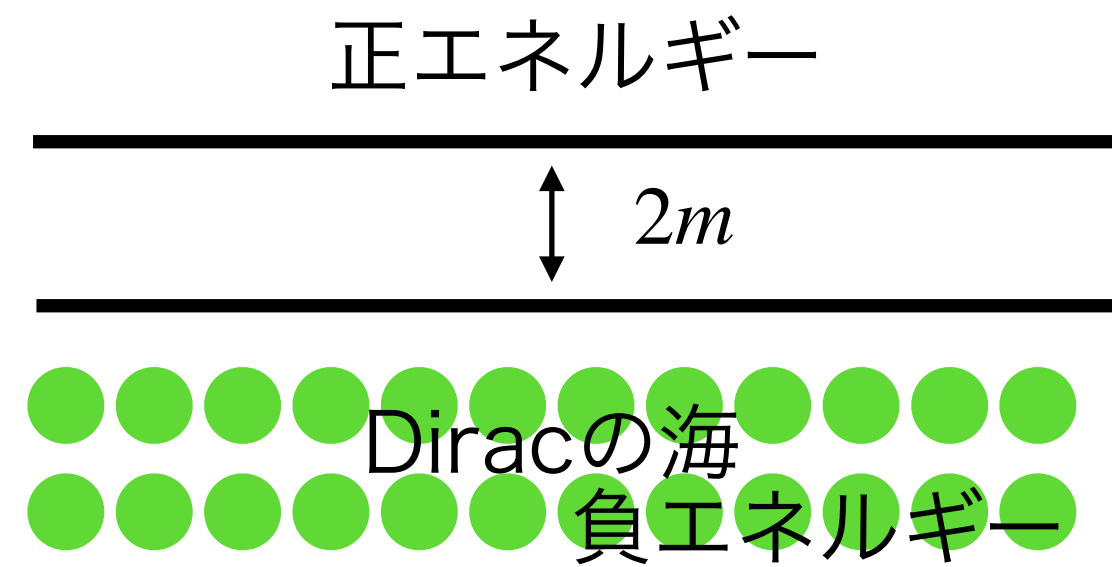
- ・ 分配関数の定式化(経路積分表示)はされている [Masaru Hongo, *Ann. Phys.* (2017)]
- ・ 定常電場中の自由エネルギーについての解析 [I. A. Shovkovy, *Phys. Lett. B441* (1998)]



自由エネルギーに虚部あり. 粒子対生成(**Schwinger機構**)が起き電流が流れるためと考察.

# イントロダクション

## Schwinger機構



対生成ストップ  
定常状態実現

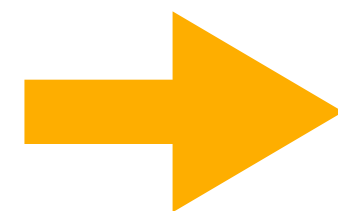
# イントロダクション

外場による非一様系では定常状態は実現する？

外場中のハミルトニアン： $\hat{H}_{\text{tot}} = \hat{H}_0 - \int d^3x \underline{A_0(x) \hat{J}^0(x)}$   
外場と粒子のカップリング

密度演算子の時間発展： $\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}_{\text{tot}}t} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}_{\text{tot}}t}$

時間に依存しない定常解



$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{H}_{\text{tot}}}}{Z}$$

Z：分配関数(規格化因子)

$\mu(x) = \mu + A_0(x)$ としても定常解

↑  
U(1)保存電荷由来

“分極”が起きて定常状態が実現した時の密度演算子と解釈可能！

# 目次

1.イントロダクション

2.アウトライン

3.外場中の虚時間形式の場の理論

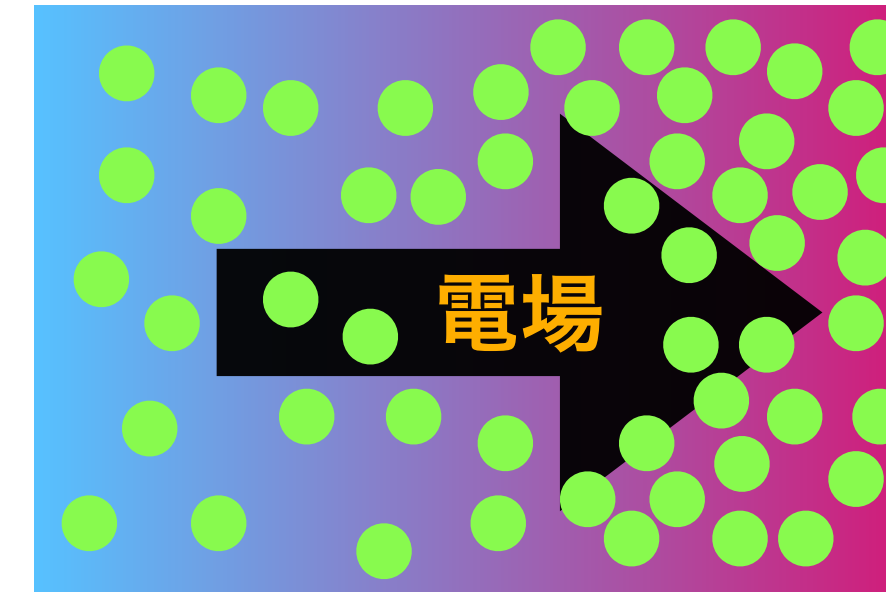
4.まとめと展望



# アウトライン

モチベーション：

荷電ボーズ粒子多体系の熱力学的性質に対する外部電場の影響の解明



アプローチ：



相対論的複素スカラー場



虚時間形式の場の理論(1+0次元) & WKB近似

結果：



外場の存在→化学ポテンシャルが場所依存



一様定常電場：粒子密度が外部電場を打ち消すように分布



非一様定常電場：熱力学的不安定性について「今回の解析≠局所熱力学」

# 目次

1. イントロダクション
2. アウトライン
3. 外場中の虚時間形式の場の理論
4. まとめと展望

# 外場中の虚時間形式の場の理論

虚時間  $t = -i\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq \beta$  を導入し分配関数を経路積分表示

分配関数の経路積分 with Euclidean Lagrangian

$$Z(\beta, \mu) = \text{Tr} e^{-\beta \int d^3x \left( \mathcal{H} - \mu(x) \hat{J}^0(x) \right)}$$

$$= \int_{\phi(\beta, \vec{x}) = \phi(0, \vec{x})} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E}$$

$$\mathcal{L}_E = \phi^*(\tau, \vec{x}) \left[ -(\partial_\tau - \mu(x))^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right] \phi(\tau, \vec{x})$$

$$\mu(x) = \mu + A_0(x)$$

ガウス積分&log

$$\log Z(\beta, \mu) = \# \text{Tr} \log (\text{固有値})$$

# 外場中の虚時間形式の場の理論

一様・非一様系の違い

$$\mathcal{L}_E = \phi^*(\tau, \vec{x}) \left[ -(\partial_\tau - \mu)^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right] \phi(\tau, \vec{x})$$



$$\mathcal{L}_E = \phi^*(\tau, \vec{x}) \left[ -(\partial_\tau - \mu(x))^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right] \phi(\tau, \vec{x})$$

e.g.) 一様系の固有値  $E_{n,\vec{k}} = (\omega_n - i\mu)^2 + \vec{k}^2 + m^2$

化学ポテンシャルの場所依存性によりFourier変換のみでは解けない

分配関数の計算

外場の存在

固有値問題 (以降1+0次元)

# 化学ポテンシャルの関数形と固有値方程式

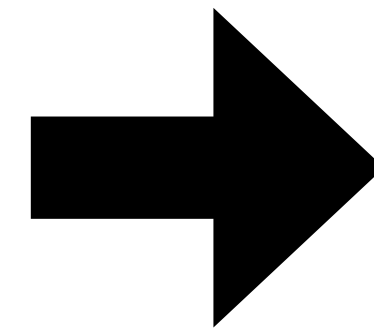
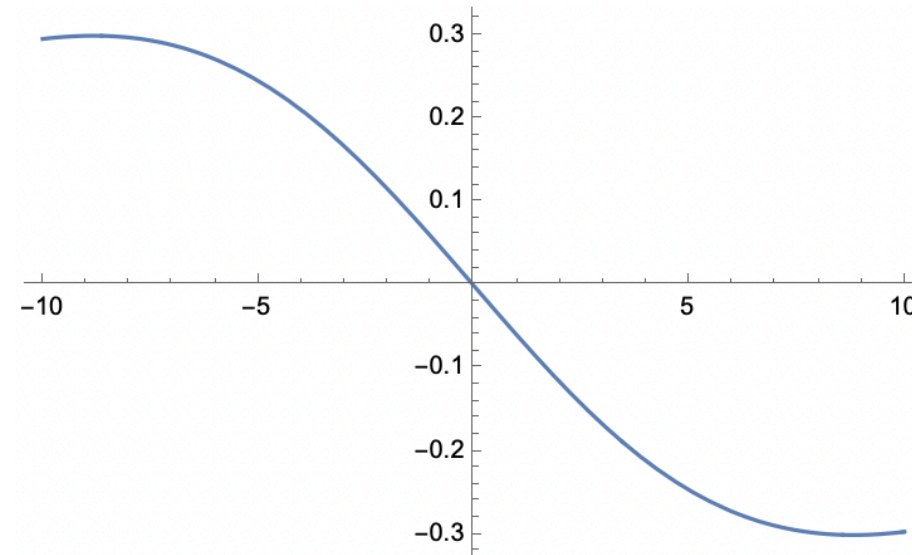
化学ポテンシャルの関数形

①  $\mu(x) = bx$

$$\mu'(x) = b$$

②  $\mu(x) = a/\cosh bx$

$$\mu'(x) = -ab \sinh bx / (\cosh bx)^2$$



固有値方程式

①  $\left[ -\frac{d^2}{dx^2} - b^2 x^2 \right] F_l(x) = \gamma_l F_l(x)$

Dirichlet境界条件  $F_l(-L_x/2) = 0 = F_l(L_x/2)$

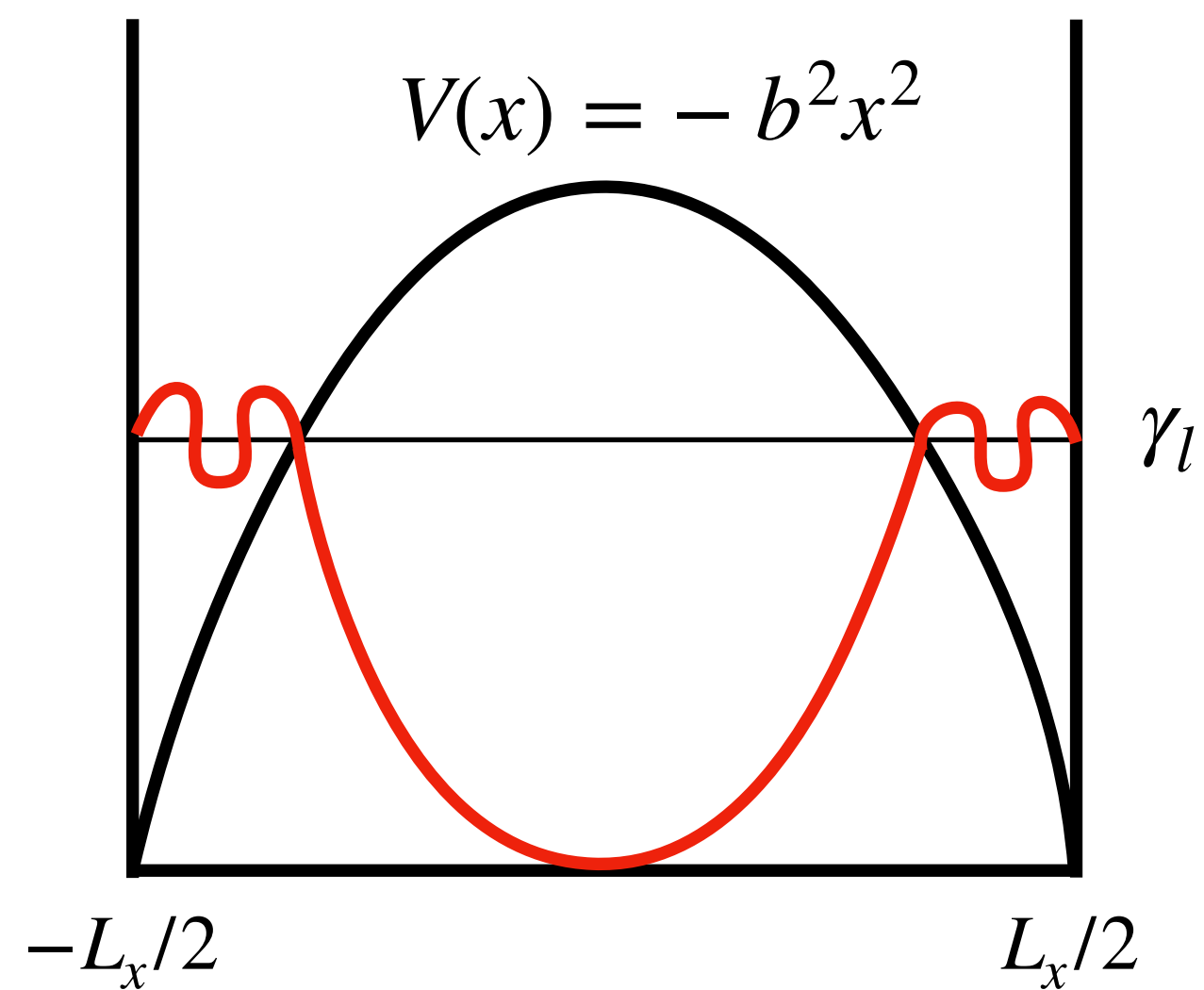
②  $\left[ -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{a^2}{(\cosh bx)^2} \right] F_l(x) = \gamma_l F_l(x)$

周期境界条件  $F_l(-L_x/2) = F_l(L_x/2)$

$$\gamma_l := E_l - m^2$$

# ① $\mu(x) = bx$

①  $\left[ -\frac{d^2}{dx^2} - b^2x^2 \right] F_l(x) = \gamma_l F_l(x)$  (IHO型)



•  $\mu(x) = \text{一定(外場なし)}$

$$-\frac{d^2}{dx^2} F_l(x) = \gamma_l F_l(x)$$

$F_l(x) \longrightarrow$  全て平面波解

• 外場あり

$F_l(x) \longrightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{damp解}(l = l_c \text{まで}) \\ \vdots \\ \text{平面波解}(l \gg l_c) \end{array} \right.$

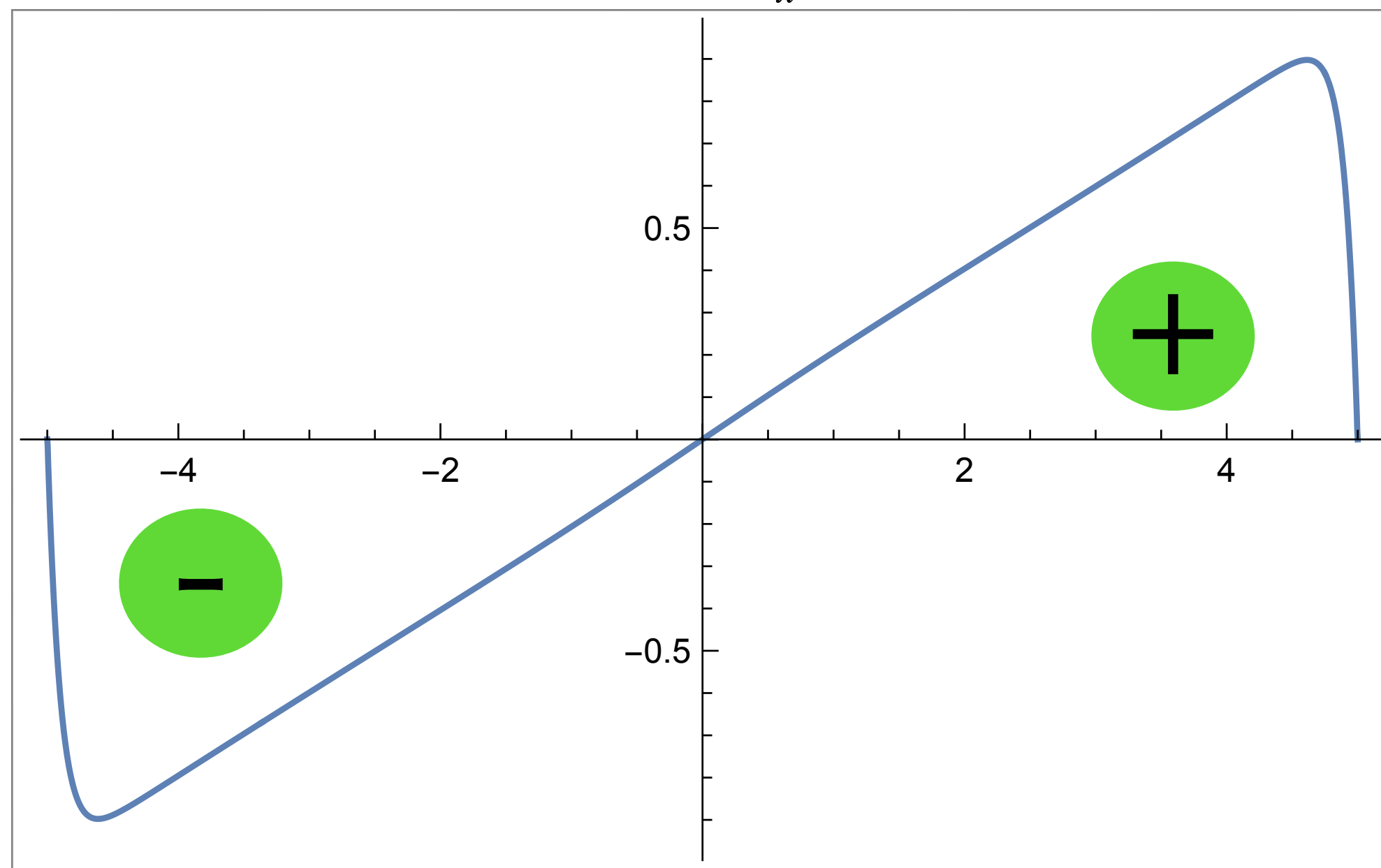
damp解の個数  $l_c$  : ポテンシャルの深さ  $\left| \frac{1}{4} b^2 L_x^2 \right|$  に依存

# $\mu = bx$ での粒子数密度

$b$  : 勾配(電場)の強さ  
 $m$  : 粒子質量  
 $L_x$  :  $x$ 方向の大きさ

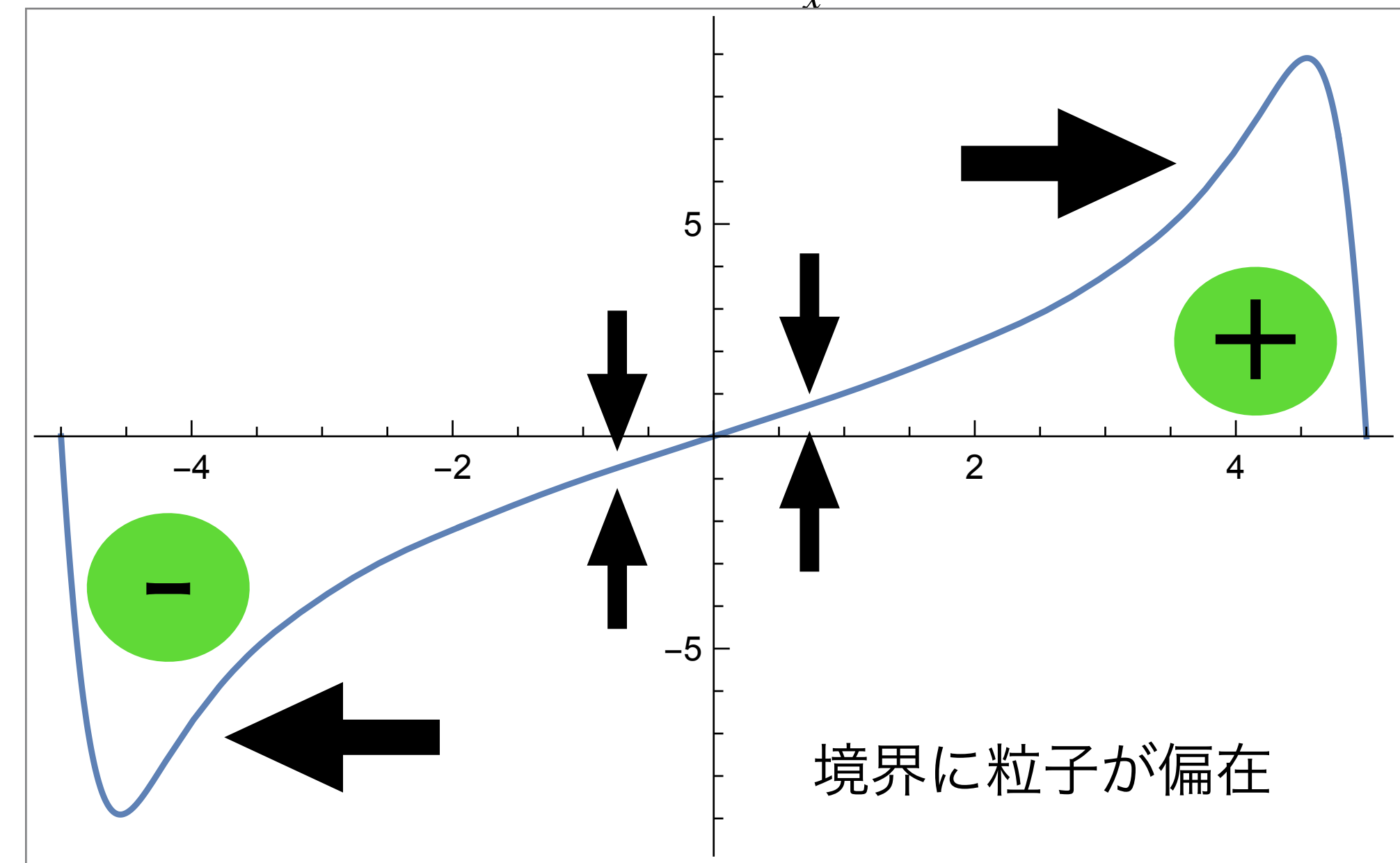
$$\langle n(x) \rangle_{\text{eq.}} = \frac{2\mu(x)}{\beta L_x} \sum_l \frac{1}{E_l} F_l^*(x) F_l(x)$$

$b = 0.1 \quad m = 5 \quad L_x = 10$



damp解なし

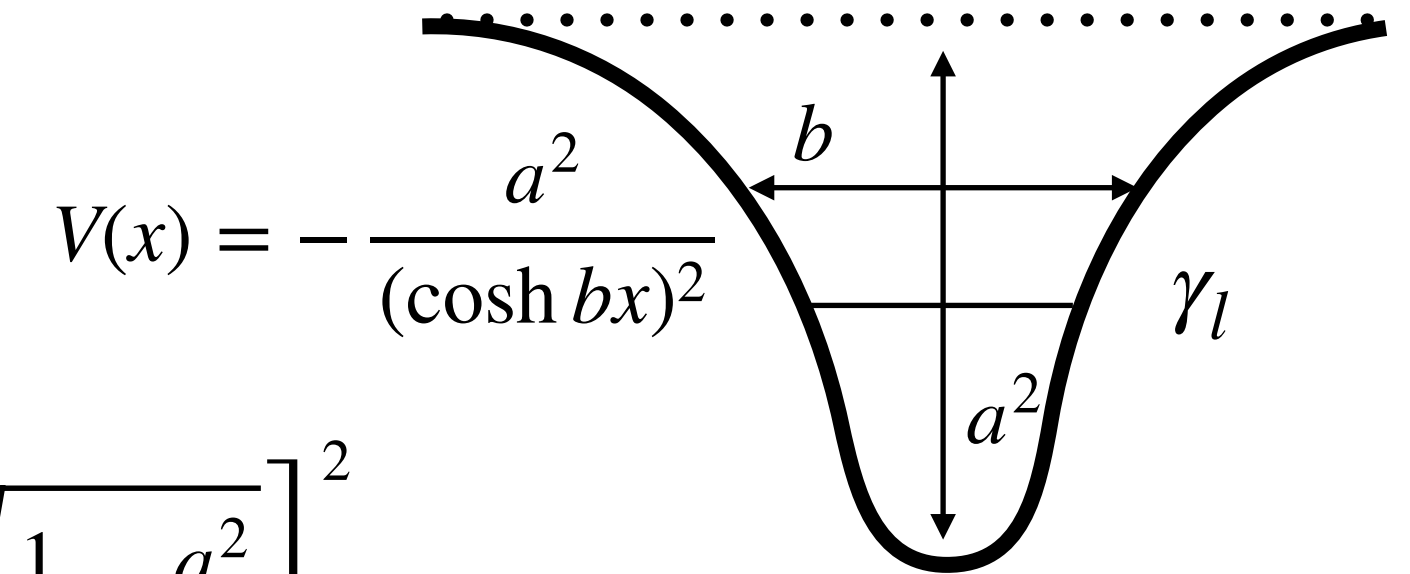
$b = 1 \quad m = 5 \quad L_x = 10$



damp解あり

## ② $\mu(x) = a/\cosh bx$

$$\textcircled{2} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{a^2}{(\cosh bx)^2} \right] F_l(x) = \gamma_l F_l(x) \quad (\text{Pöschl-Teller型})$$



$$\gamma_l = -b^2 \left[ -\left(l + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2}{b^2}} \right]^2 \quad \longrightarrow \quad E_l = m^2 - b^2 \left[ -\left(l + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2}{b^2}} \right]^2$$

(LandauLifshitz-QuantumMechanics p.73)

$$l = 0, 1, 2, \dots, l_c < -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{a^2}{b^2}}$$

$E_l = 0$ となるとき自由エネルギーは発散.

$$\log Z(\beta, \mu) = \#\text{Tr} \log E_l$$

$$a = m\sqrt{1 + \frac{b}{m}} > m$$



# $\mu(x) = a/\cosh bx$ での粒子数密度

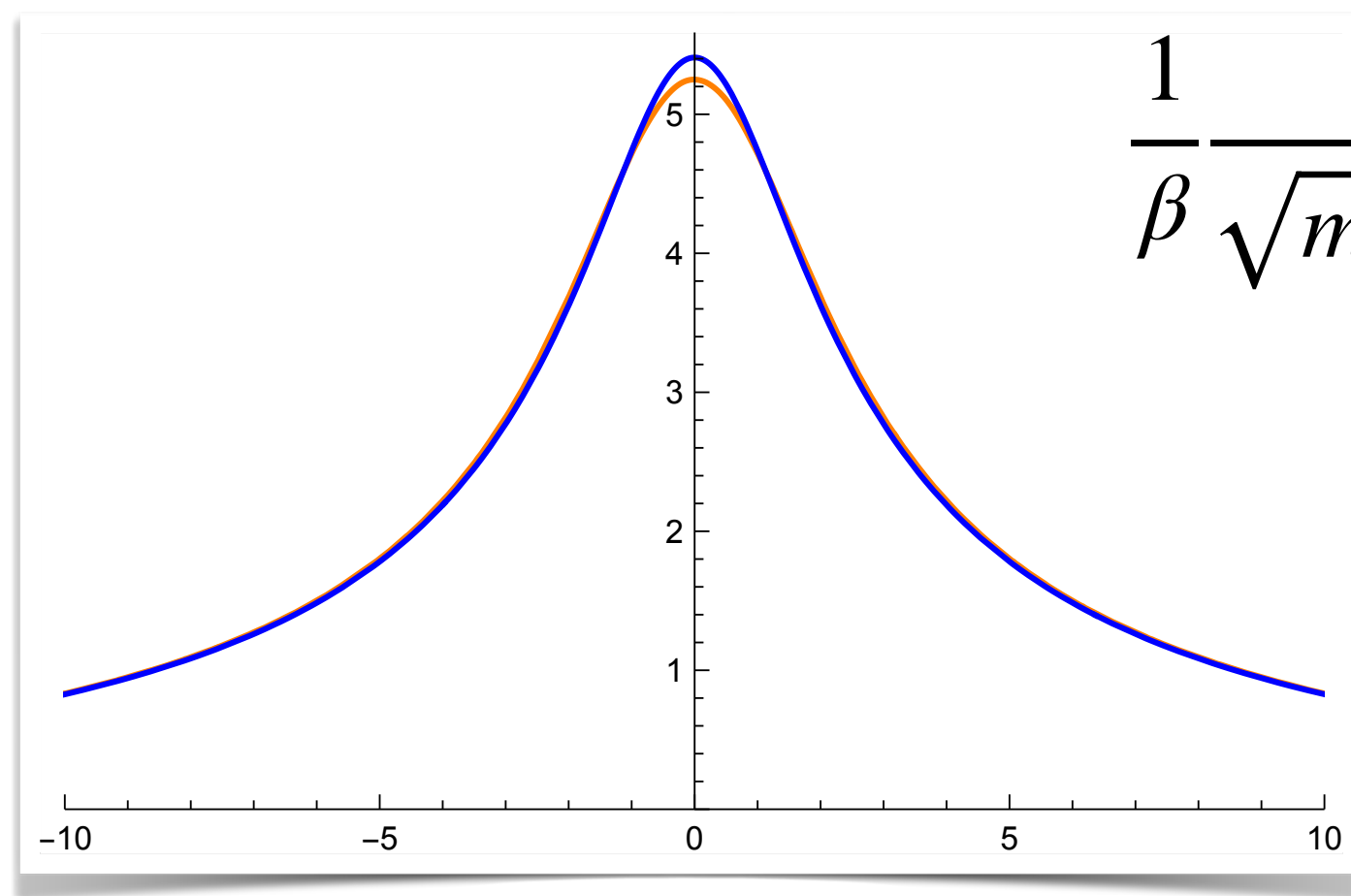
$a$  : 化学ポテンシャルの高さ  
 $b$  : ポテンシャルの広がり具合  
 $m$  : 粒子質量

局所熱力学  $\frac{1}{\beta} \frac{\mu(x)}{\sqrt{m^2 - \mu(x)^2}} \longrightarrow a = m$ で熱力学的不安定

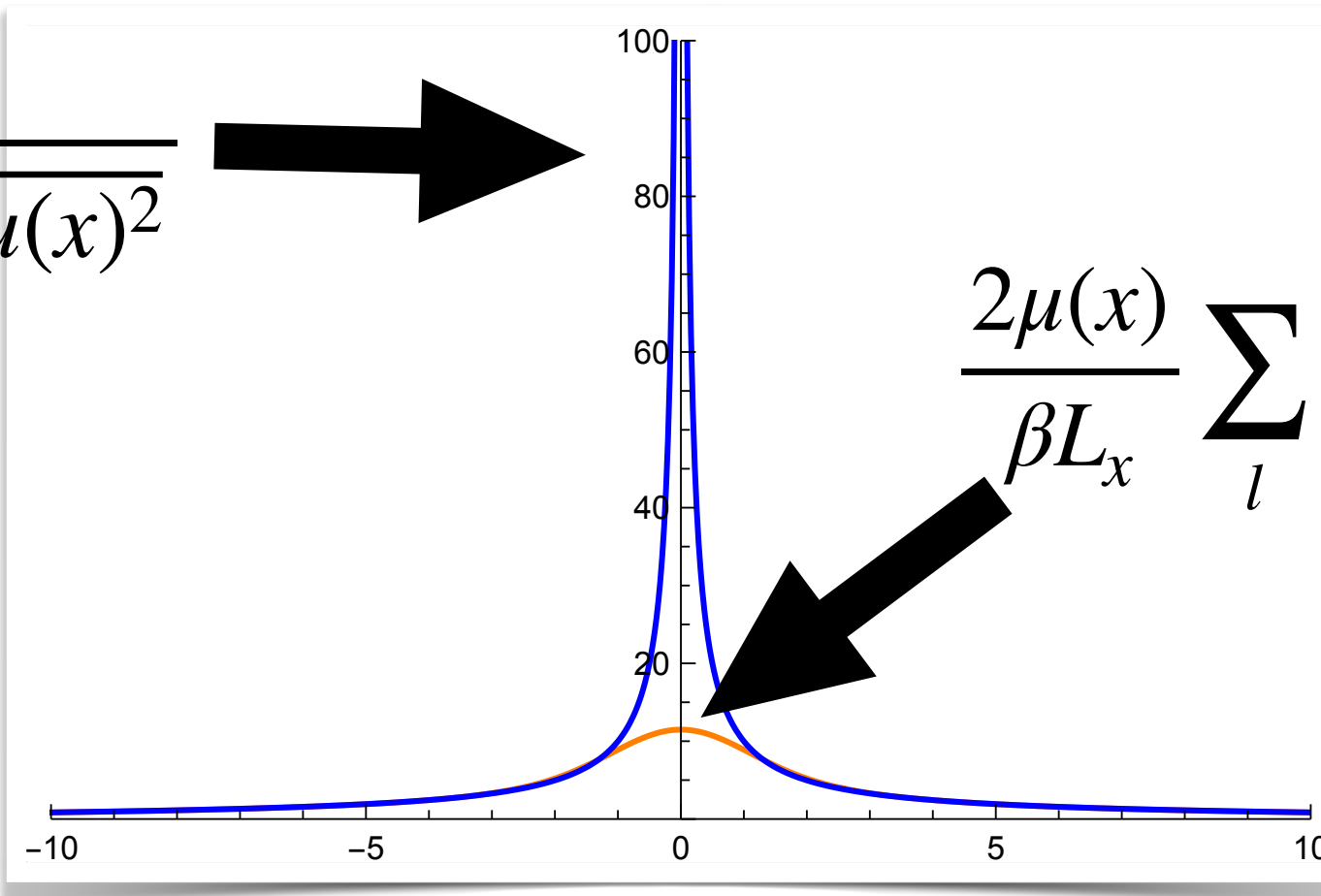
$a = 5.9, b = 0.1, m = 6$

$a = 6, b = 0.1, m = 6$

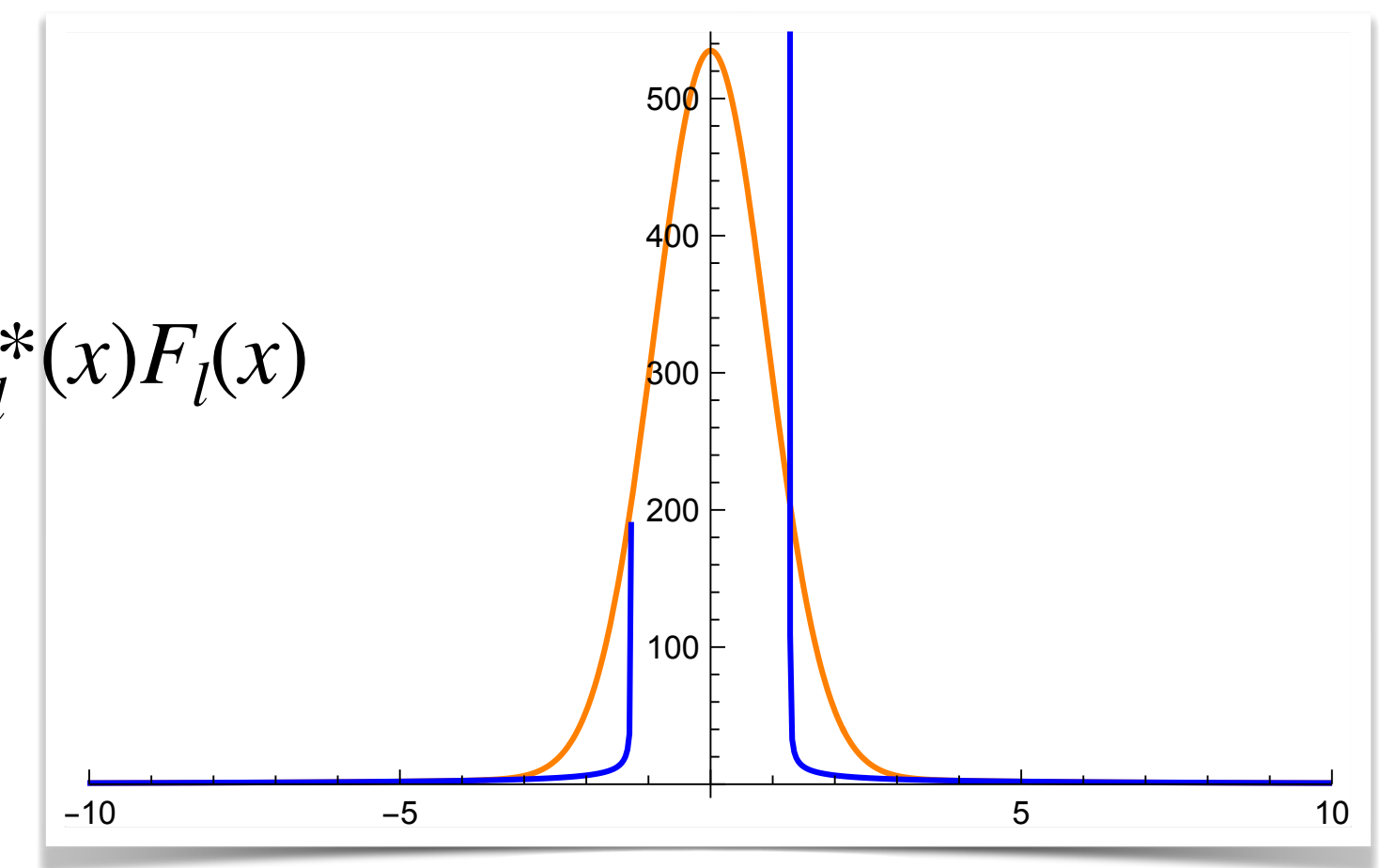
$a = 6.049, b = 0.1, m = 6$



$$\frac{1}{\beta} \frac{\mu(x)}{\sqrt{m^2 - \mu(x)^2}}$$



$$\frac{2\mu(x)}{\beta L_x} \sum_l \frac{1}{E_l} F_l^*(x) F_l(x)$$



今回の解析  $\frac{2\mu(x)}{\beta L_x} \sum_l \frac{1}{E_l} F_l^*(x) F_l(x) \longrightarrow a = m\sqrt{1 + \frac{b}{m}} > m$

相互作用があると平均場近似で相転移になる点がずれる？

# 目次

1. イントロダクション
2. アウトライン
3. 外場中の虚時間形式の場の理論
4. まとめと展望

# まとめと展望

モチベーション：荷電ボーズ粒子多体系の熱力学的性質に対する外部電場の影響の解明

アプローチ： 相対論的複素スカラー場

 虚時間形式の場の理論(1+0次元) & WKB近似

結果： 外場の存在→化学ポテンシャルが場所依存

 一様定常電場：粒子密度が外部電場を打ち消すように分布

 非一様定常電場：熱力学的不安定性について「今回の解析≠局所熱力学」

## 展望

- 量子統計力学
- 相互作用を入れて相転移点の解析？
- 他の外場について考えてみる？

# 高温極限による古典統計力学への移行

**高温極限**

$$i\omega_n = 2\pi i n T$$

$$m^2 + \omega_n^2$$

$n \neq 0$ は"重い"

$n = 0$ のみで近似

$$\phi(\tau, \vec{x}) \longrightarrow \phi(\vec{x})$$

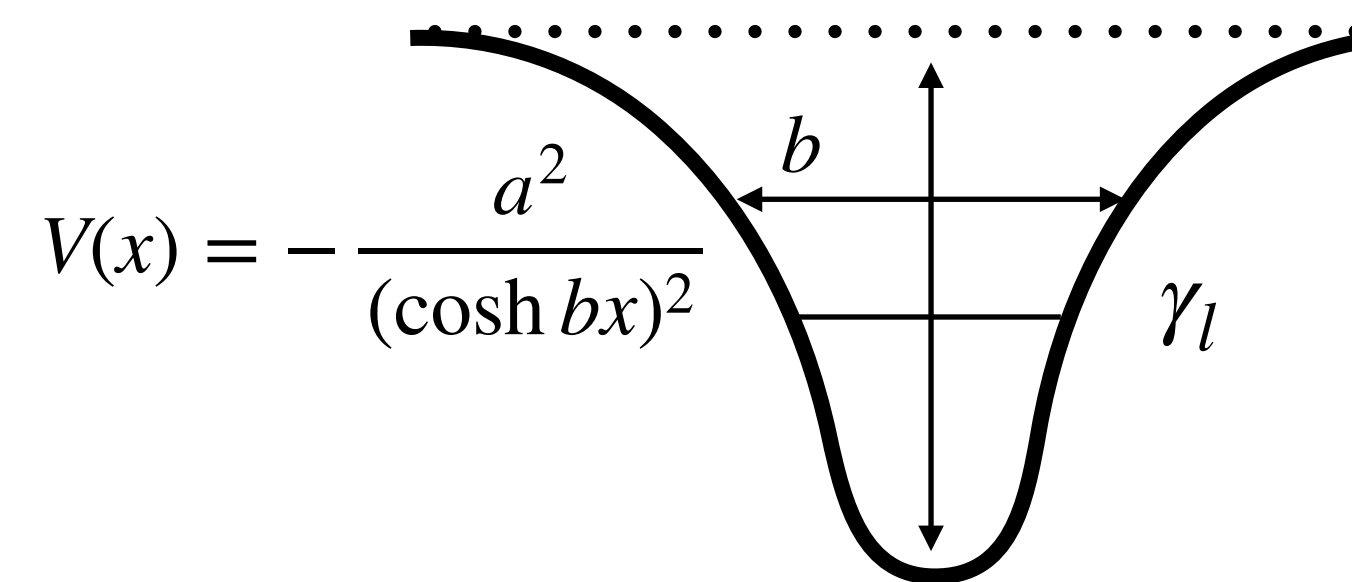
古典統計力学へ(以降(1+0)次元で考える)

# $l_c$ の振る舞い

・  $l_c$ の振る舞いについて

$b \rightarrow$  小に伴って  $l_c \rightarrow$  大となるがこのとき  $a \simeq m$ .

Pöschl-Teller型から箱型？



$$a = m\sqrt{1 + \frac{b}{m}} > m$$