

大強度ハドロン線形加速器の 基本的な物理設計方針

岡本 宏己

広島大学 大学院先進理工系科学研究科

加速器中の荷電粒子運動

- ビーム構成粒子は線形力（四重極場あるいはソレノイド磁場）によって収束されている。
- 結果として、各粒子は設計軌道の周りで振動する：

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K_x(s)x = 0$$

ビームの進行方向自由度にも大雑把には同様の線形収束力が用意されている。

独立変数 s は軌道長、 $K_x(s)$ は収束要素の配置によって決まる関数である。

- この振動の（単位収束構造当たりの）振動数を“**チューン**”と称する。ビームの密度が高い場合、粒子間クーロン斥力の影響でチューンが設計値からシフトする。
- ビームの収束は特定の単位収束構造を繰り返して達成する場合が多い；要するに、上式中の $K_x(s)$ は s の周期関数である。

基礎方程式

- ハミルトニアン

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2} + V_Q + \cancel{\delta V} + I_{sc}\phi$$

各種コンポーネントが含む誤差や
補正電磁石等による非線形場

$$V_Q = \frac{1}{2}K_x(s)x^2 + \frac{1}{2}K_y(s)y^2 + \frac{1}{2}K_z(s)z^2$$

$1/\beta^2\gamma^3$ に比例！

- ポアソン方程式

$$\nabla^2\phi = -\frac{q}{\varepsilon_0} \iiint f(x, y, z, p_x, p_y, p_z; s) dp_x dp_y dp_z$$

- ブラソフ方程式

$$\frac{\partial f}{\partial s} + [f, H] = 0$$

IBSは無視

解析的に解くのはまず不可能なので、定常状態（設計ラティスに整合したビーム）の摂動に対する安定性を調べる

任意の初期位相空間分布 f から出発して、これらの方程式系を自己無撞着に解ければ、（通常のハドロンビームにおける）あらゆる空間電荷効果が正確に予言できる！

ビーム不安定化の 発生条件

クーロン自己場あるいは
外場が駆動する“共鳴”である

共鳴条件（単粒子）

- 非結合共鳴

$$m\sigma_{x(y)} = n360^\circ$$

（ m と n はいずれも正の整数）

m 次の共鳴はチューンが $1/m$ の自然数倍の時に発生

- 結合共鳴

$$k\sigma_x + \ell\sigma_y = n360^\circ$$

（ k と ℓ は整数）

共鳴の次数は $m = |k| + |\ell|$

差共鳴の場合は二自由度間で射影エミッタンスの交換が起こる

共鳴条件（単粒子）

- 非結合共鳴

$$m\sigma_{x(y)} = n360^\circ$$

σ は“tune”に360度を乗じたもので“**phase advance**”と呼ばれる。線形加速器業界ではtuneよりもphase advanceのほうが慣習的に用いられている。

- 結合共鳴

$$k\sigma_x + \ell\sigma_y = n360^\circ$$

和共鳴 $k\ell > 0$; 差共鳴 $k\ell < 0$

共鳴の次数は $m = |k| + |\ell|$

差共鳴の場合は二自由度間で射影エミッタンスの交換が起こる

共鳴条件（含 自己場効果）

一次元シートビーム模型に基づくブラソフ理論の予言を拡張した仮説

- ビームコア

m 次集団共鳴条件

Phys. Rev. AB **24**, 084201 (2021)

$$n_{\perp}\sigma_{\perp}[1 - C_m(1 - \eta_{\perp})] + n_{\parallel}\sigma_{\parallel}[1 - C_m(1 - \eta_{\parallel})] = n180^{\circ}$$

n が偶数の共鳴は外部ポテンシャル（誤差磁場など）で駆動可能！

- ビームテール（ハロー領域）

$$2n_{\perp}(\sigma_{\perp} - \Delta\sigma_{\perp}) + 2n_{\parallel}(\sigma_{\parallel} - \Delta\sigma_{\parallel}) = n360^{\circ}$$

- * ハロー粒子の共鳴はビームコア全体の空間電荷ポテンシャルによって駆動される。
- * 粒子間クーロン結合が弱いため、共鳴不安定性はほぼインコヒーレントに発展する。
- * ハロー領域のインコヒーレント・チューンシフト $\Delta\sigma$ は二乗平均値よりも小さい。
- * 共鳴次数は近接する集団共鳴帯（コア共鳴）の2倍、即ち $2m$ である。

多粒子シミュレーション

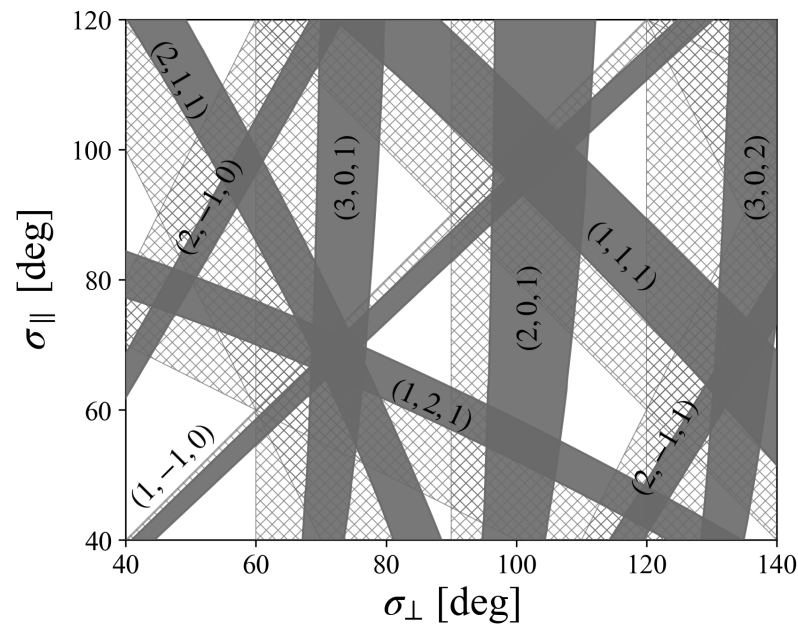
PICシミュレーションが主流
(分子動力学計算が必要な場合もある)

Prog. Theor. Exp. Phys. **2024**, 073G01.

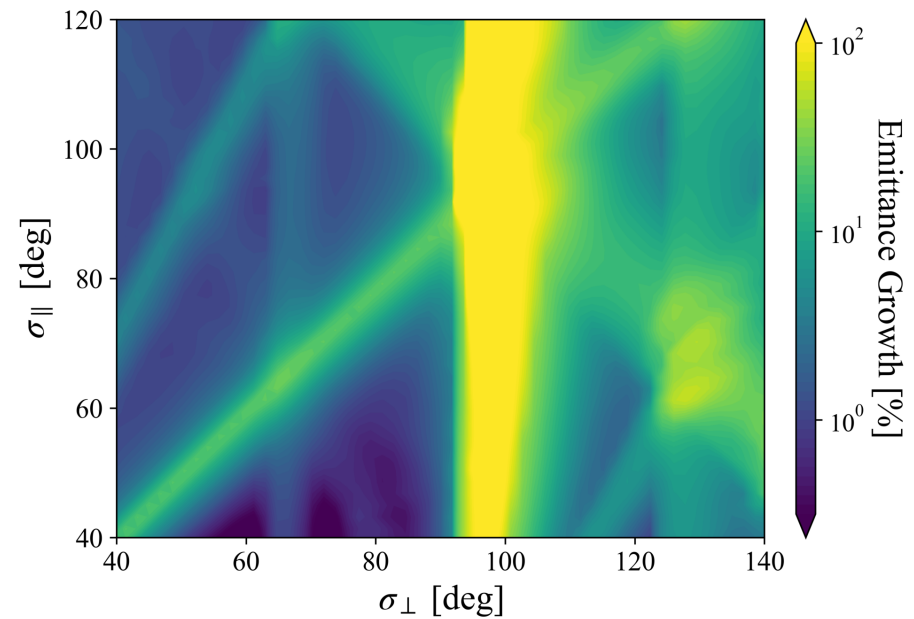
安定領域図 (stopband diagram)

ビーム強度とエミッタンスを固定 [$\eta_{\perp} = 0.8$ at (50 deg, 25 deg)]
PIC計算 : FODO lattice (100 periods)

- 集団共鳴理論



- PICシミュレーション



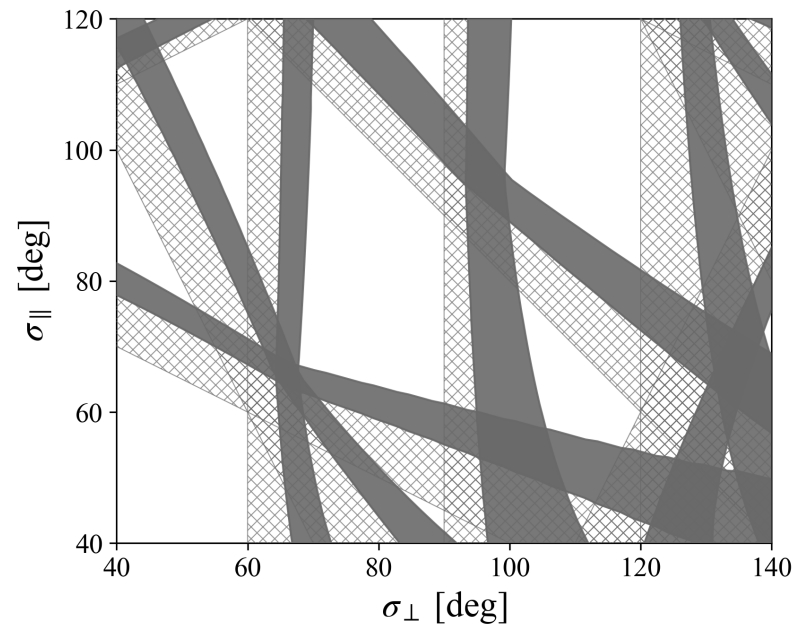
Phys. Rev. AB **25**, 054201 (2022); **27**, 054201 (2024).

安定領域図 (stopband diagram)

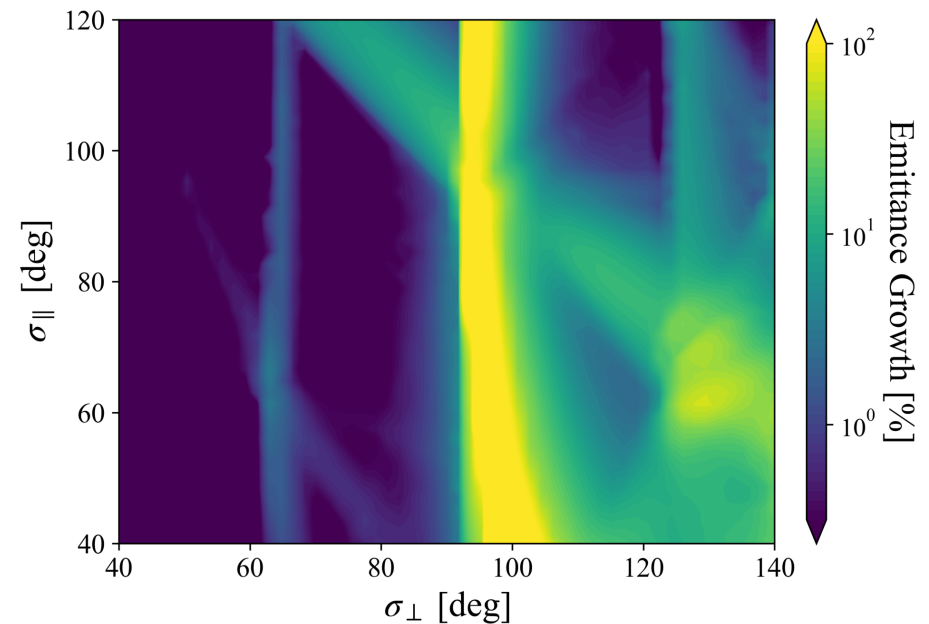
熱平衡 (ビーム強度は前の例と同じ)
PIC計算 : FODO lattice (100 periods)

$$\text{熱平衡条件 : } \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} = \frac{\eta_{\perp} \sigma_{\perp}}{\eta_{\parallel} \sigma_{\parallel}}$$

- 集団共鳴理論



- PICシミュレーション

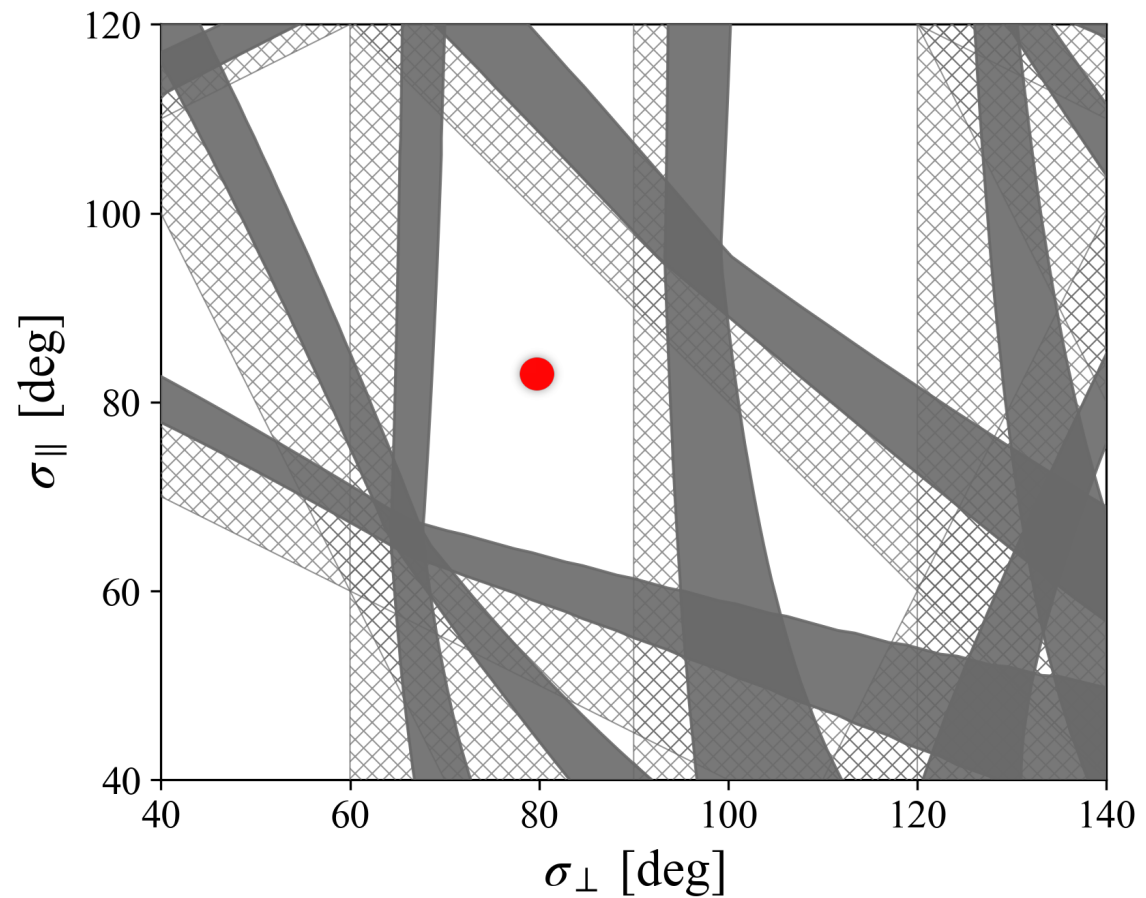


Phys. Rev. AB **25**, 054201 (2022); **27**, 054201 (2024).

ビームのクオリティを維持するには...

十分広い安定領域の内側に動作点（チューンの設計値）を置けばよい！

例えば...



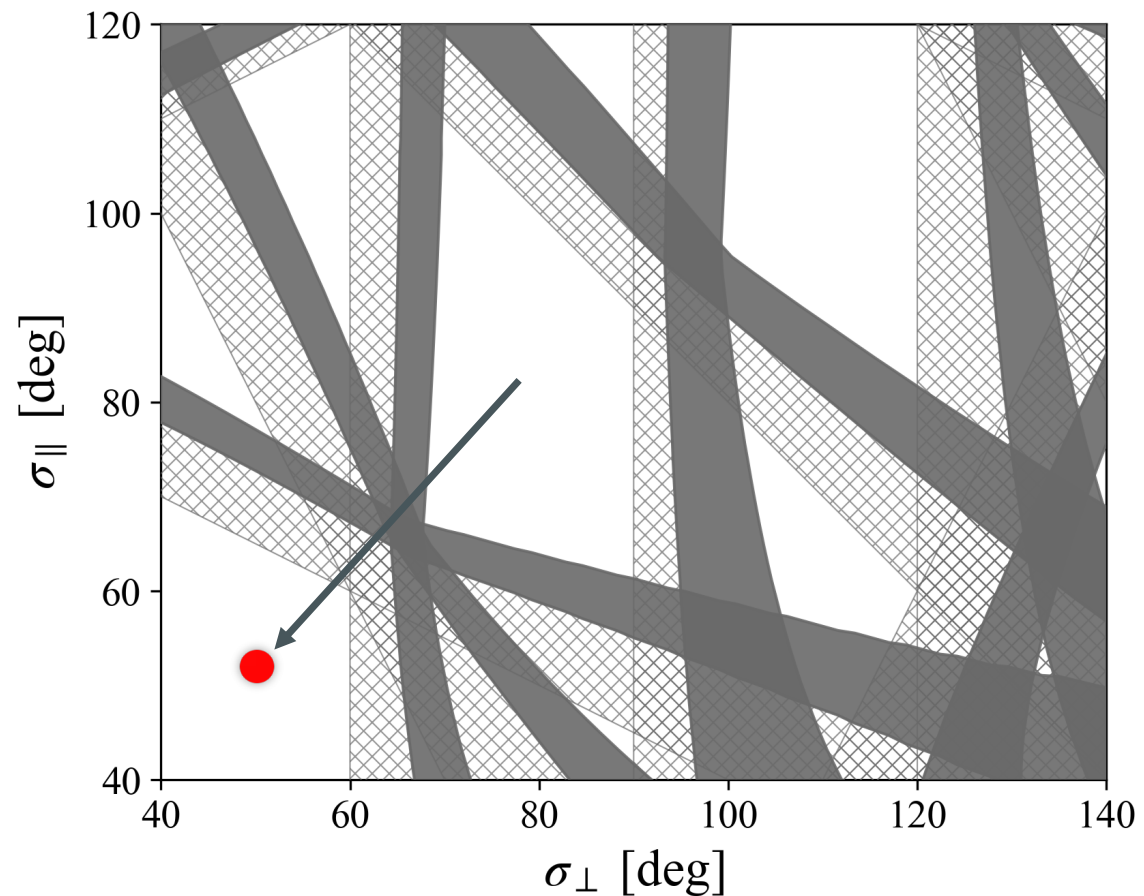
ビームのクオリティを維持するには...

十分広い安定領域の内側に動作点（チューンの設計値）を置けばよい！

例えば...

ところが、線形加速器では、ビームエネルギーの増加に伴って動作点が大きく動く！

その結果、いくつかの共鳴帯を横切ってしまう...



DTL加速シミュレーション

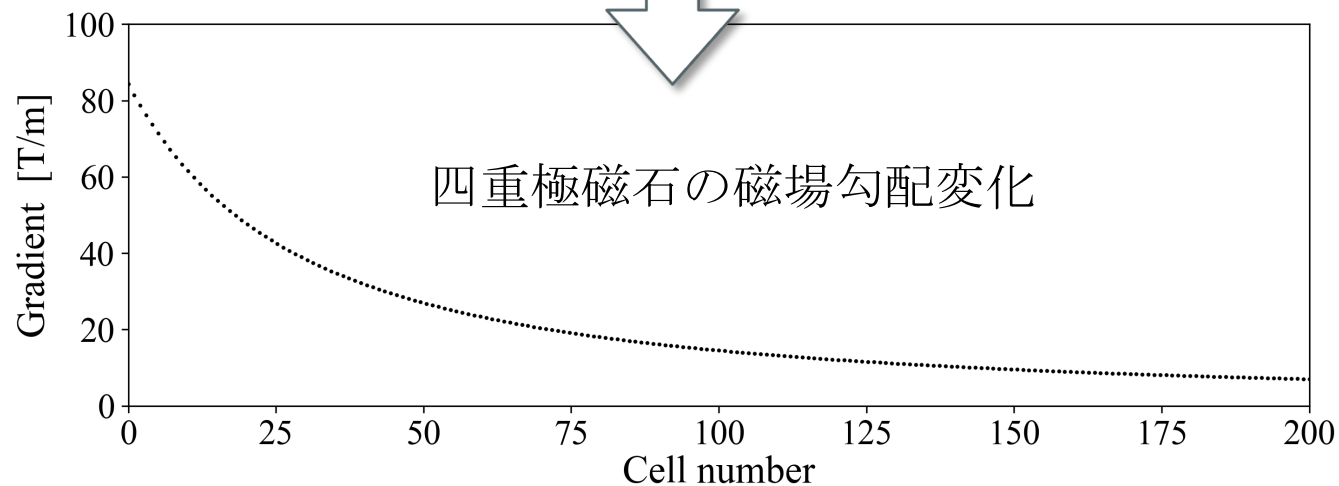
加速構造	アルバレ型 DTL
加速粒子	H ⁻
ピーク電流	50 mA
運転周波数	324 MHz
入射エネルギー	3 MeV
セル数	200
単位収束構造	FODO
四重極磁石の初期長	40 mm
ボア半径	8 mm
加速位相	-30 deg.
平均加速勾配	2.7 MV/m
規格化二乗平均エミッタンス（横方向）	0.3 π mm·mrad

計算結果（例 1）

基本設計方針 $\eta_{\perp} \sigma_{\perp} / \eta_{\parallel} \sigma_{\parallel} \approx \text{const.}$

入射時の規格化二乗平均エミッタンス： $(\varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel}) = (0.3, 0.4)[\pi\text{mm} \cdot \text{mrad}]$

$$\frac{\eta_{\perp} \sigma_{\perp}}{\eta_{\parallel} \sigma_{\parallel}} = \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} = \frac{0.4}{0.3} \quad \text{の場合、熱平衡！}$$

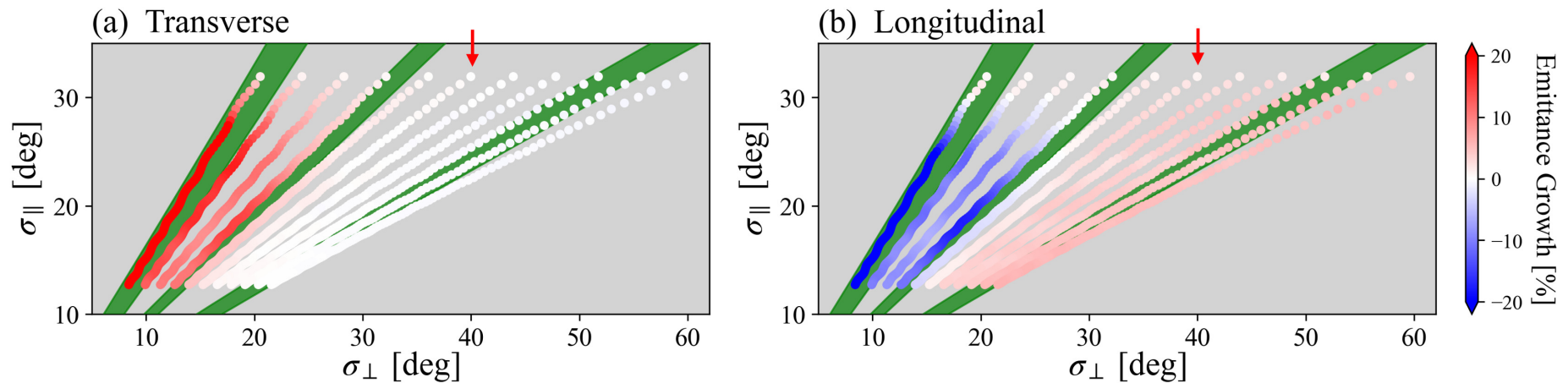


計算結果（例 1）

基本設計方針 $\eta_{\perp} \sigma_{\perp} / \eta_{\parallel} \sigma_{\parallel} \approx \text{const.}$

入射時の規格化二乗平均エミッタンス : $(\varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel}) = (0.3, 0.4) [\pi \text{mm} \cdot \text{mrad}]$

$$\frac{\eta_{\perp} \sigma_{\perp}}{\eta_{\parallel} \sigma_{\parallel}} = \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} = \frac{0.4}{0.3} \quad \text{の場合、熱平衡 !}$$



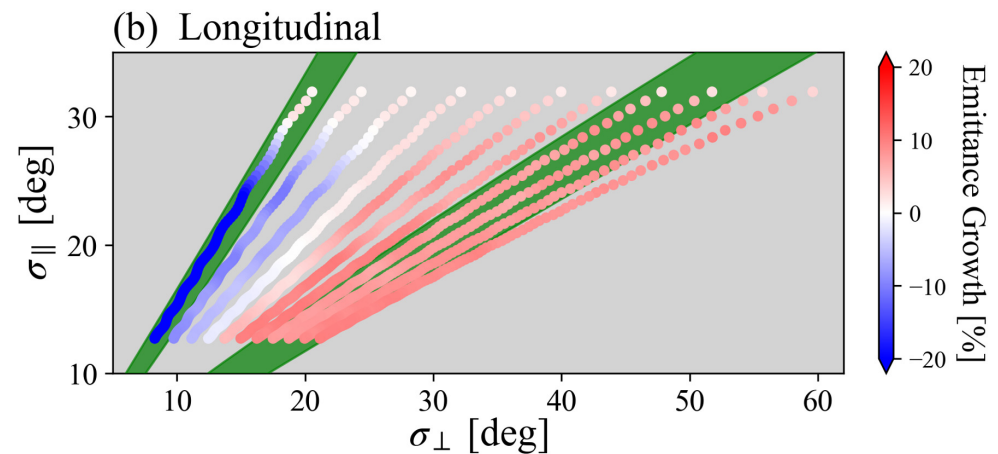
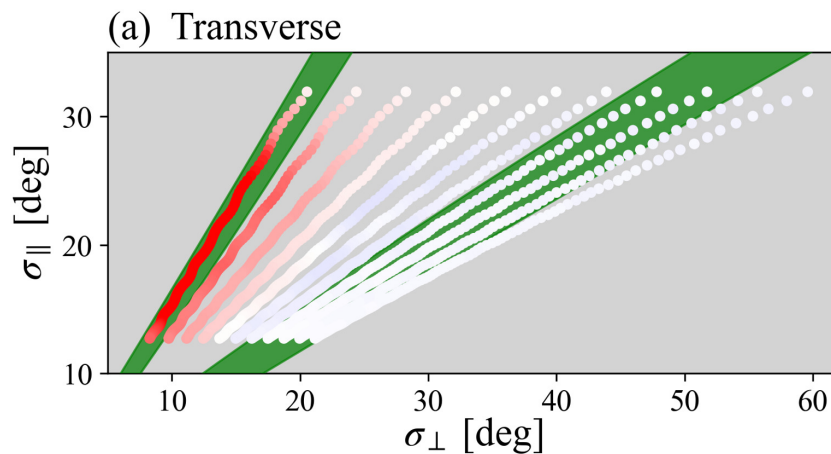
計算結果 (例 2)

基本設計方針 $\eta_{\perp} \sigma_{\perp} / \eta_{\parallel} \sigma_{\parallel} \approx \text{const.}$

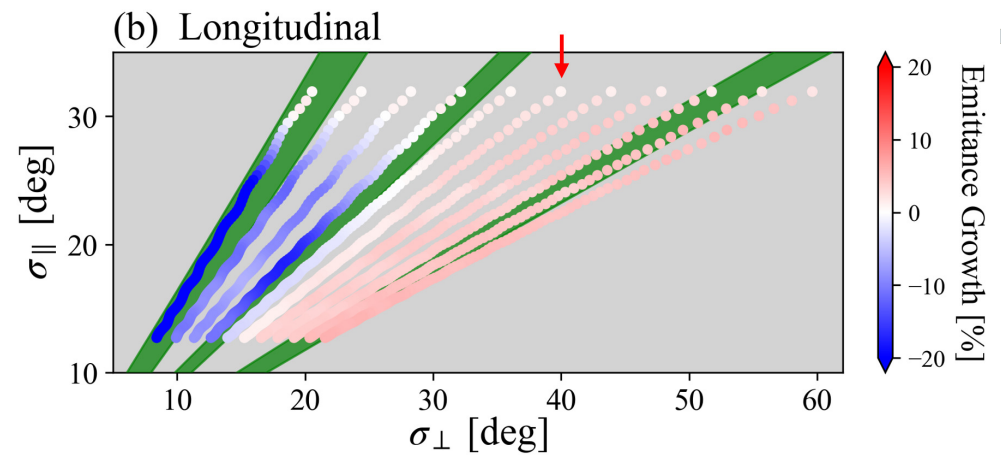
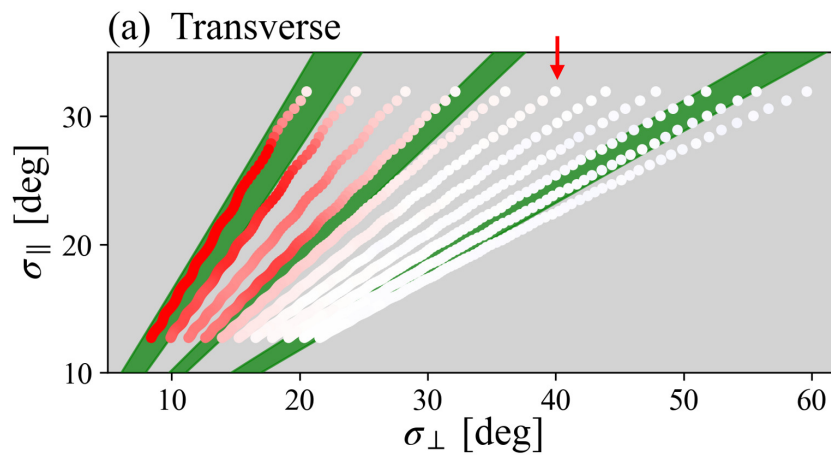
入射時の規格化二乗平均エミッタンス : $(\varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel}) = (0.3, 0.3)[\pi\text{mm} \cdot \text{mrad}]$



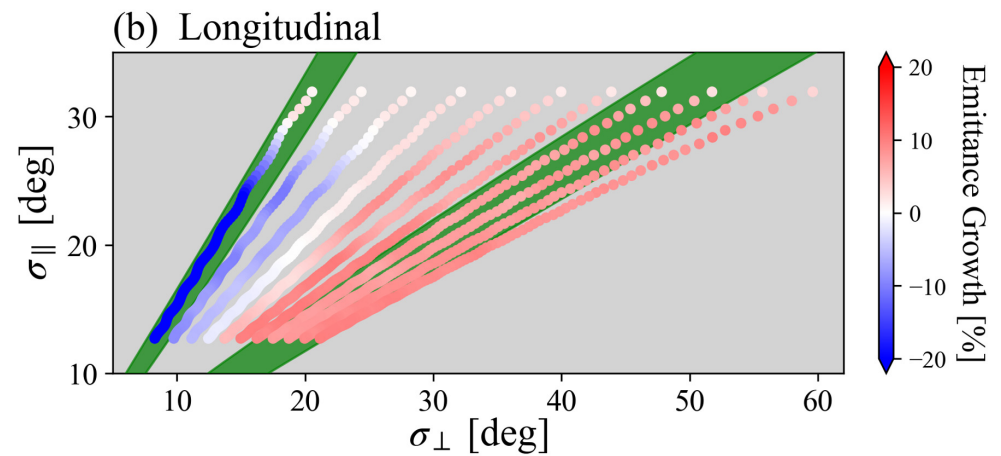
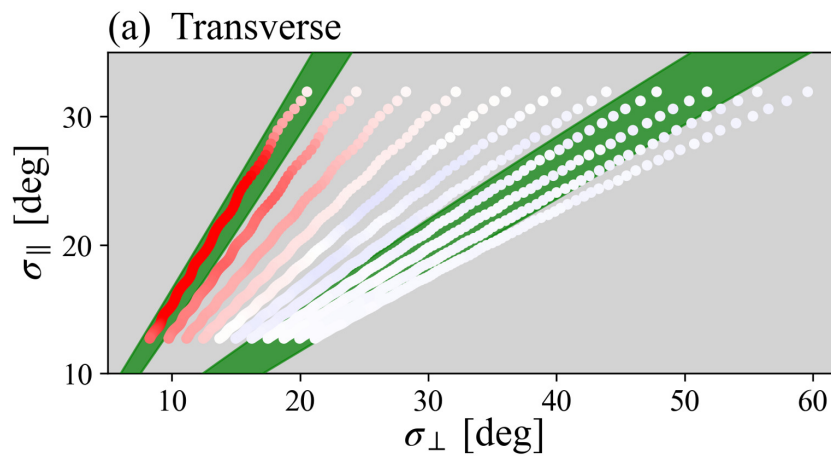
$$\varepsilon_{\parallel} = 0.3\pi\text{mm} \cdot \text{mrad}$$



計算結果 (例 2)



$$\varepsilon_{\parallel} = 0.3\pi\text{mm} \cdot \text{mrad}$$



ビームハロー形成

加速器に入射されるビームの位相空間粒子分布が理想から大きくズレている場合に発生

Prog. Theor. Exp. Phys. **2025**, 033G01.

ビームハローとは

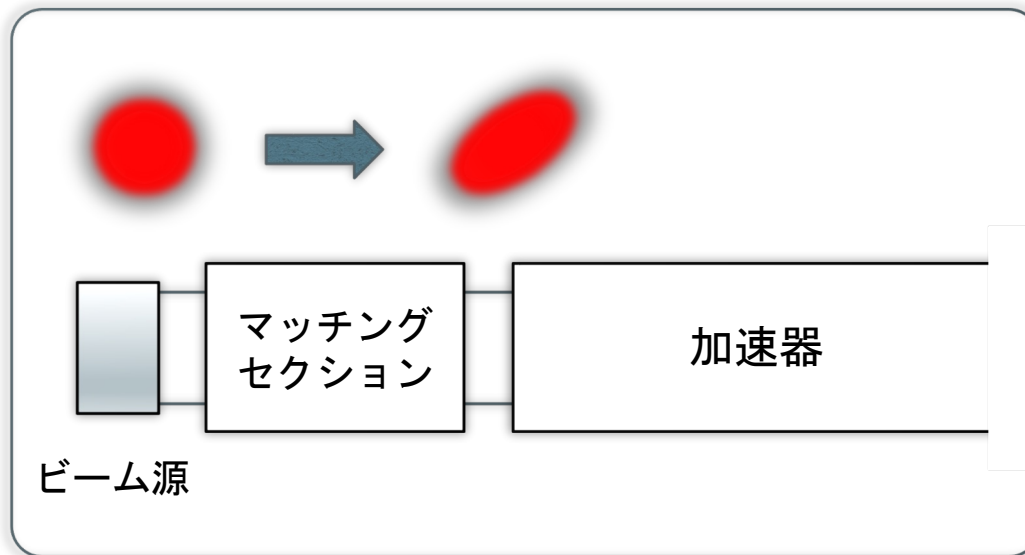
大多数の粒子が密集するビーム中心核の
周囲に広がる、比較的低密度の粒子雲

- エミッタンスが増大する（ビームクオリティの劣化）
- 振幅が大きいため、周囲の壁に衝突して失われる（ビーム強度の低下）
- ビームエネルギーが高い場合、加速器の各種コンポーネントにダメージを与える（加速器全体の放射化）
- 完全に除去するのは難しい...



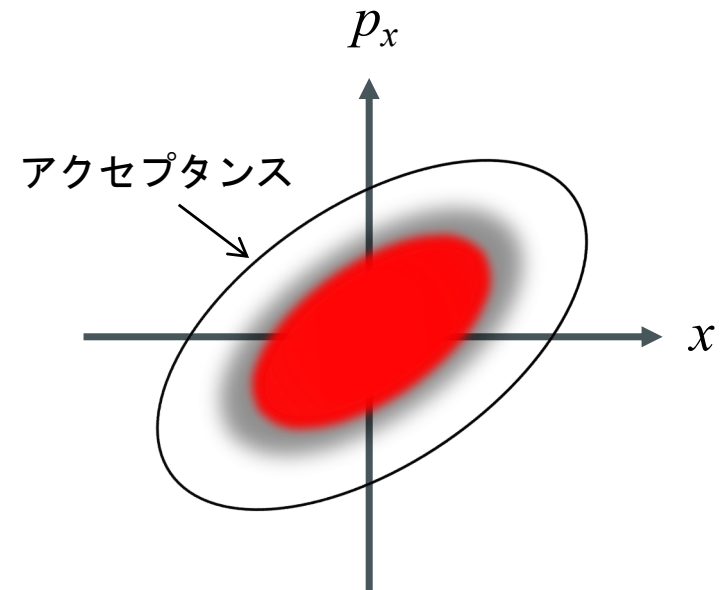
ビーム断面

ラティスに整合したビーム



加速器とビーム源（あるいは前段加速器）の間に“マッ칭ングセクション”を設け、加速器入り口で要求される位相空間形状にビーム構成粒子の分布を整合する。

マッ칭ングセクションには通常、磁場勾配可変な数個の四重極磁石が並べられている。



$$2J_x = \beta_x p_x^2 + 2\alpha_x x p_x + \gamma_x x^2$$

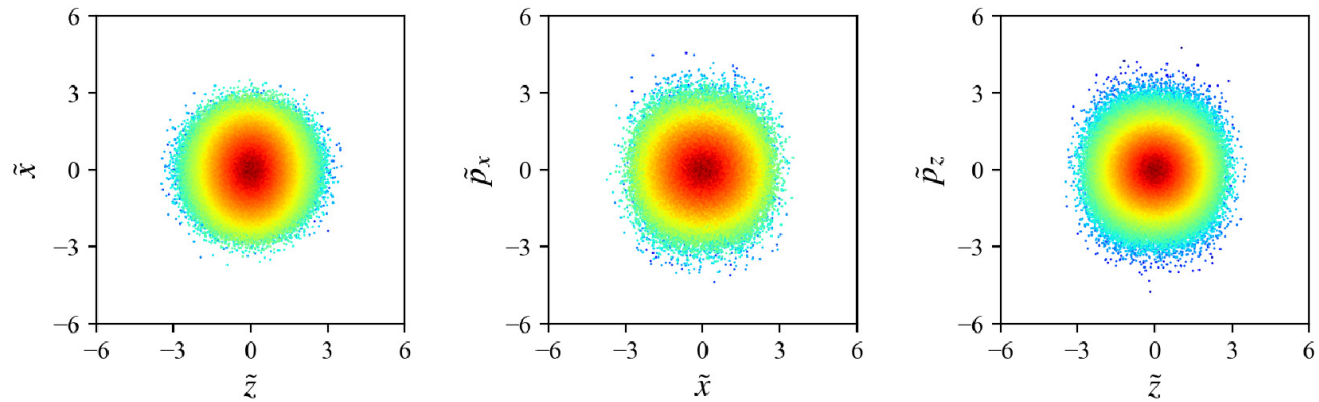
$(\alpha_x, \beta_x, \gamma_x)$: Courant-Snyder functions

クーロン相互作用がなければ、 J_x はこの力学系の保存量（作用）で、エミッタンスそのものである。

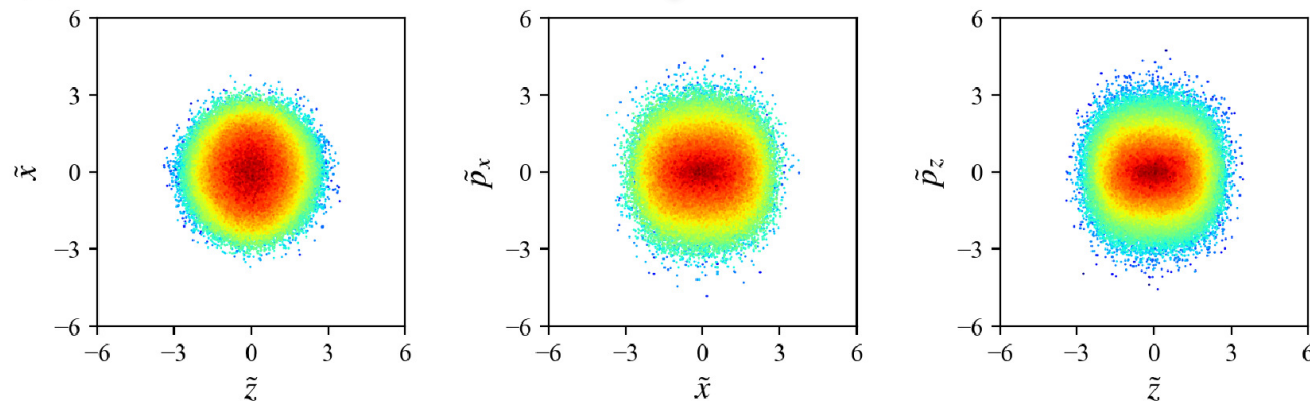
整合ビームの輸送

整合ビーム

$$\eta_{\perp} = \eta_{\parallel} = 0.7, \varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp} = 2.0$$



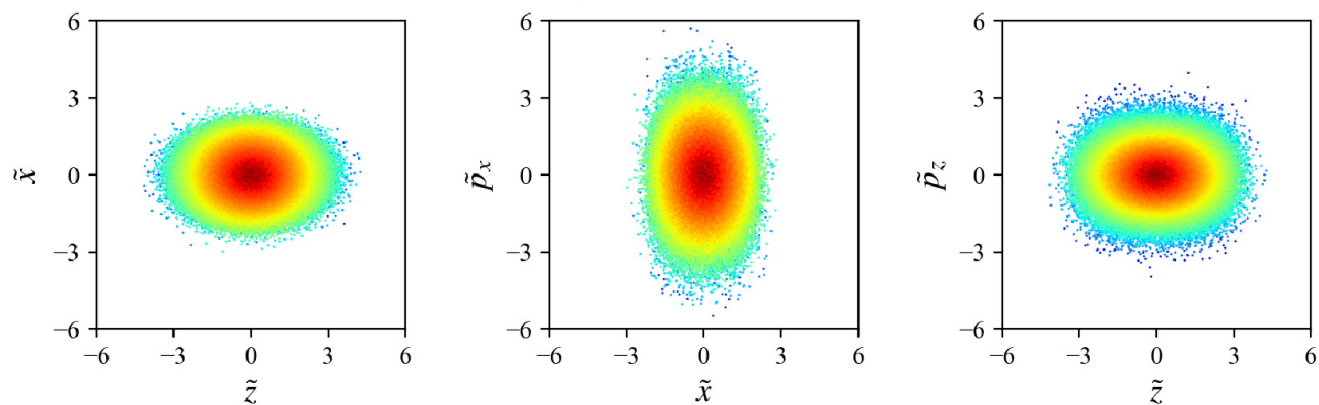
200 m 輸送後



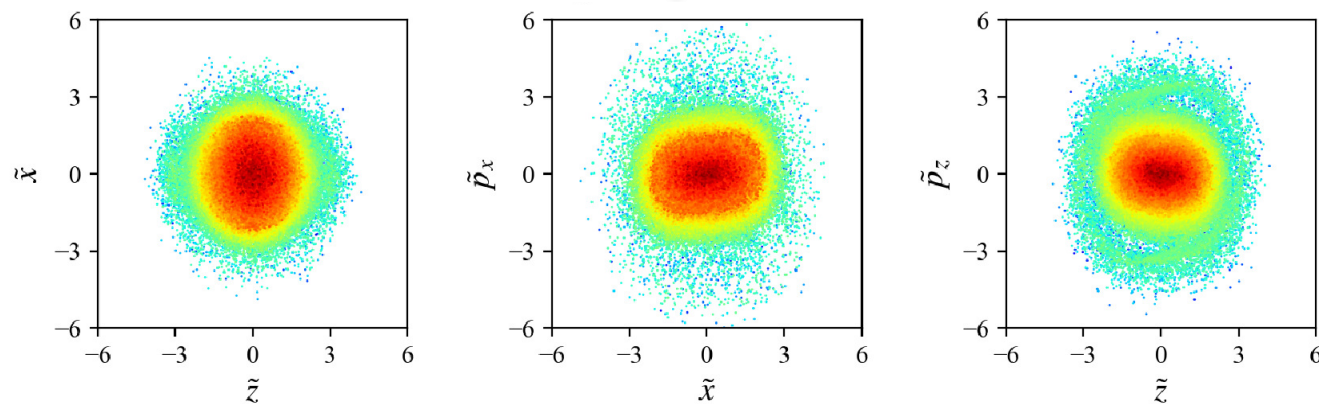
不整合ビームの輸送

不整合ビーム

(不整合率 : 20 %)



200 m 輸送後



基礎設計上の留意点

- リニアック入り口での二乗平均チューン降下率（rms tune depression : η ）は？
- 設計軌道付近におけるソレノイド磁場の一様性は？（結局、加速電場を通じて、断面方向にも同じ周期性が現れるはず）
- ソレノイド収束なので、脈動モードが励起される（共鳴帯の分布が四重極収束の場合と違う）？
- Phase advance の設計値（入射から出力までの変化）は？磁場強度を変えて、phase advanceを制御するのか？
- 予想される非線形成分の強さは？
- 入射ビームのラティスに対する整合性は？