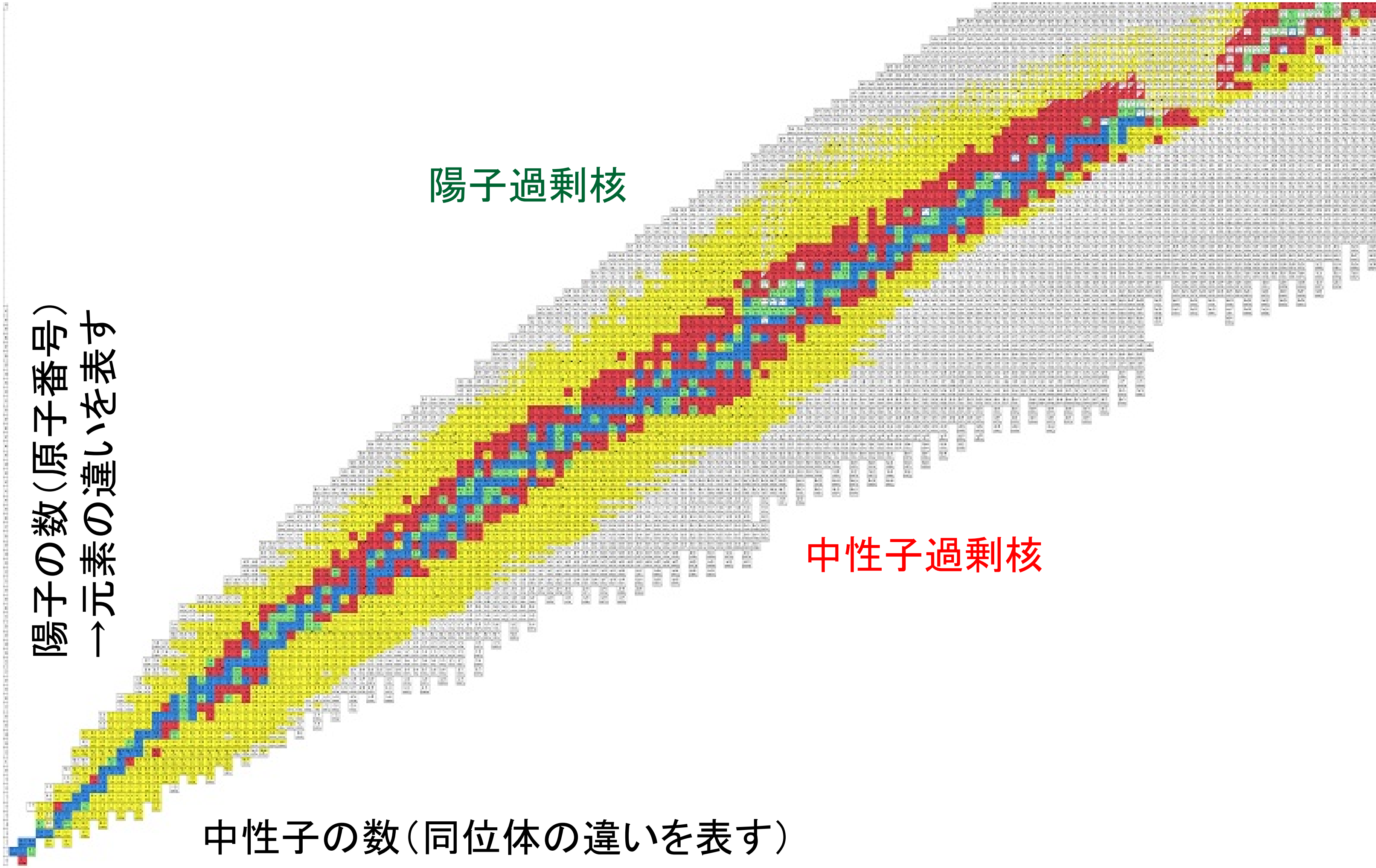
核分裂の理論

関西大学システム理工学部
和田隆宏

RIBF討論会　於:新潟大学　2012年12月27日

核図表



なぜ核分裂するか

- ワイツゼッカー・ベーテの質量公式

$$M(Z,N)=Zm_p+Nm_n-B(Z,N)/c^2$$

$$B(Z,N)=a_V A-a_S A^{2/3}-a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}}-a_{sym}\frac{(N-Z)^2}{A}+\delta(A)$$

体積項　表面項　クーロン項　対称項　対相関項

$$a_V=15.6\mathrm{MeV},\quad a_S=17.2\mathrm{MeV}$$
$$a_C=0.70\mathrm{MeV},\quad a_{sym}=23.3\mathrm{MeV}$$

$$\delta(A)=\begin{cases}12/\sqrt{A} & (Z:\text{偶数},N:\text{偶数})\\ -12/\sqrt{A} & (Z:\text{奇数},N:\text{奇数})\\ 0 & (A=Z+N:\text{奇数})\end{cases}$$

- ベータ安定線(ハイゼンベルグの谷)
  - Zが小　対称エネルギー　N=Z
  - Zが大　対称エネルギー＋静電エネルギー　N>Z

核子当りの結合エネルギー

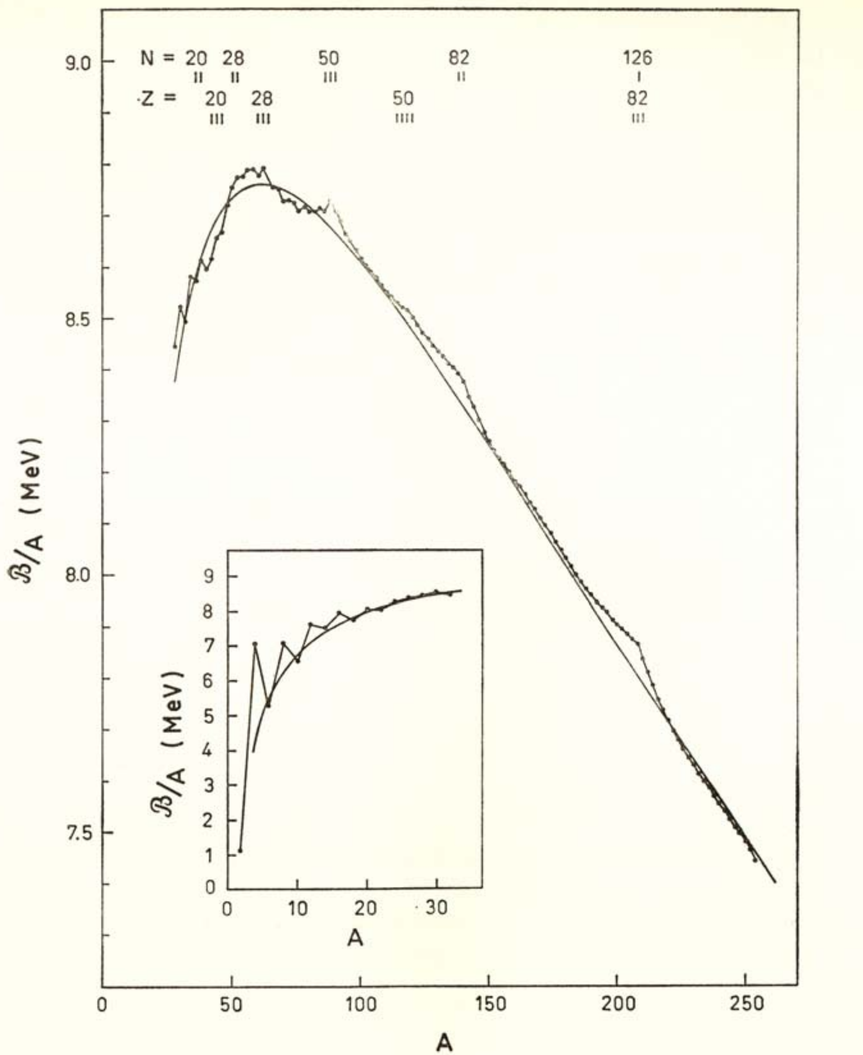
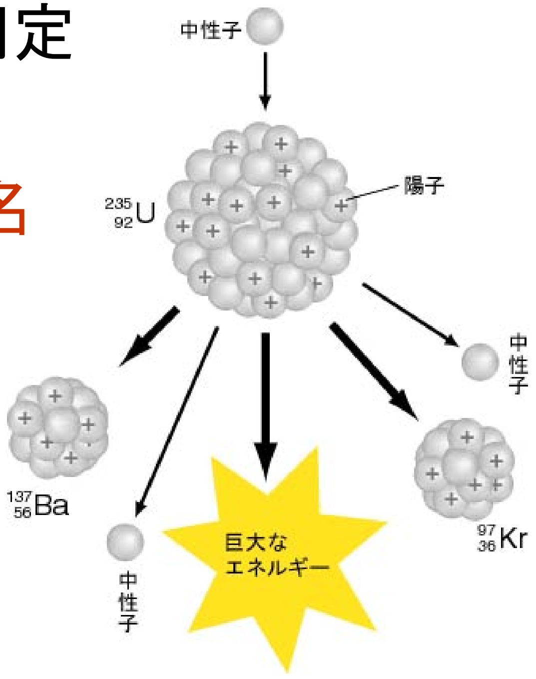


図 2-4 結合エネルギーの実験値は J. H. E. Mattauch, W. Thiele, and A. H. Wapstra, *Nuclear Phys.* **67**, 1 (1965) の編集物からとった．滑らかな曲線は，半経験的質量公式 (2-12) を表す．ただし，定数は A. E. S. Green and N. A. Engler, *Rhys. Rev.* **91**, 40 (1953) の与えた値を用いてある．

- 1核子当り約8MeV
- 質量公式による滑らかな曲線の周りに振動
  → 殻補正エネルギー
- Fe付近が最も安定
  - 軽い核 → 表面エネルギー
  - 重い核 → 静電エネルギー
- 重い原子核の核子当りの結合エネルギーは質量数と共に減少する
- 軽い原子核は核融合によってエネルギーを生み出す
- 重い原子核は核分裂でエネルギーを放出する

核分裂の発見

- ベルリングループ (L. Meitner, O. Hahn, F. Strassmann)
  - O. Hahn, F. Strassmann (1938)
    - U + n でRa的な元素を発見 → Ba と同定
  - L. Meitner, O. Frisch (1939)
    - U + n → Ba + Kr と解釈、核分裂と命名
- 理論的裏付け
  - Bohr, Wheeler (1939)
    - ^{235}U + n → Ba + Kr + 200MeV
    - ^{238}U + n → ^{239}U → ^{239}Np → ^{239}Pu
  - 液滴模型による分裂障壁の計算



Bohr–Wheeler理論

- 変形によるエネルギー変化
  - 表面エネルギー vs. クーロンエネルギー

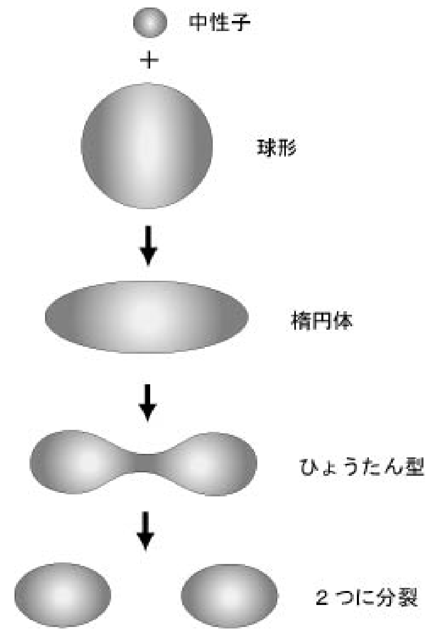
$$E_{LDM}(def) = E_S(0)\left[B_S(def) - 1 + 2x\left(B_C(def) - 1\right)\right]$$

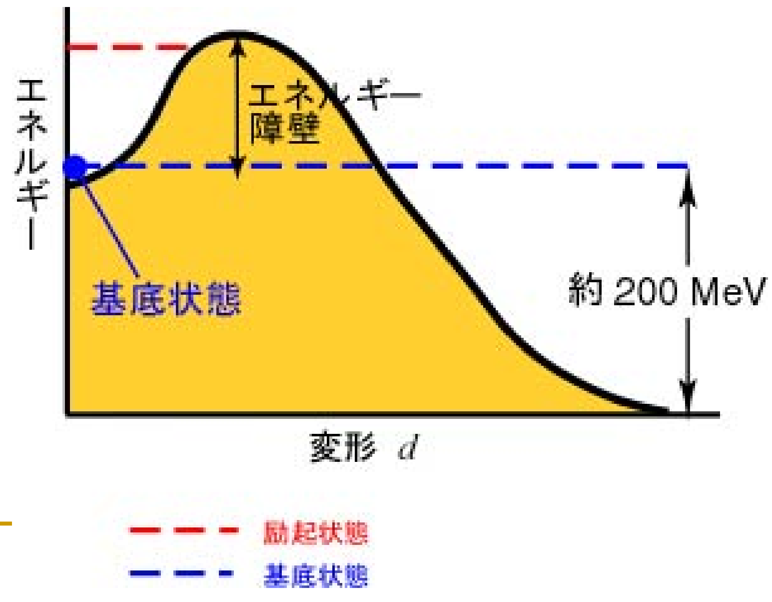
$$B_S(def) = \frac{E_S(def)}{E_S(0)} > 1\ ,\quad B_C(def) = \frac{E_C(def)}{E_C(0)} < 1$$

$$x = \frac{E_C(0)}{2E_S(0)} = \frac{Z^2/A}{\left(Z^2/A\right)_{crit}} \approx \frac{Z^2/A}{50}$$

- 分裂障壁の高さ $(x \approx 1)$

$$B_f \approx E_S(0)\left[0.73(1-x)^3 - 0.33(1-x)^4\right]$$





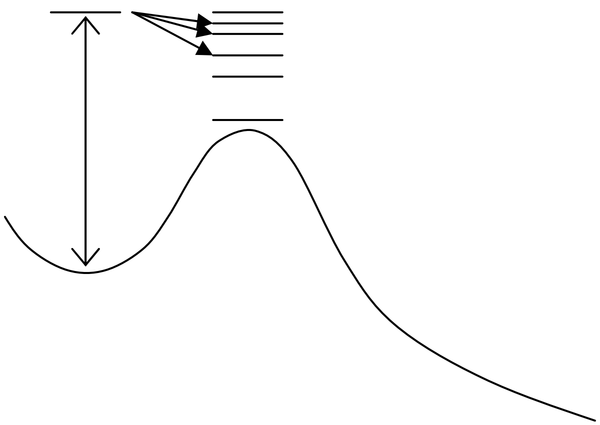
遷移状態の方法 (Transition State Method)

- 分裂幅の計算

$$dE\int_0^{E-B_f}\frac{vdp}{2\pi\hbar}\rho_A^*(E-B_f-\varepsilon)=dE\frac{\Gamma_f}{\hbar}\rho_A(E)$$

単位時間当たりの核分裂の数

$$\Gamma_f=\frac{1}{2\pi\rho_A(E)}\int_0^{E-B_f}d\varepsilon\rho_A^*(E-B_f-\varepsilon)$$

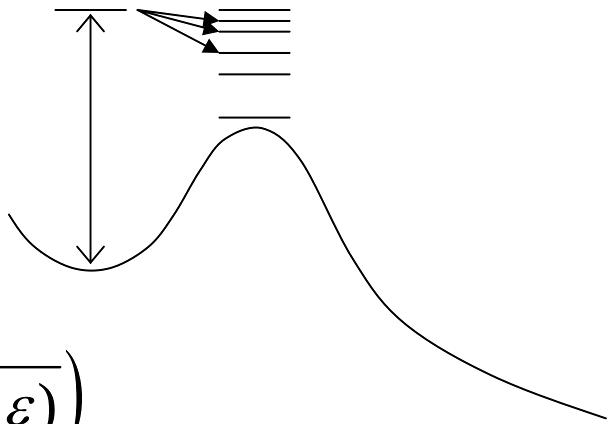


- フェルミガス模型による準位密度

$$\rho(E^*)\propto\exp\left(2\sqrt{aE^*}\right)$$

$$\Gamma_f=\frac{T}{2\pi}\exp\left(-\frac{B_f}{T}\right) \qquad E^*=aT^2$$

Transition state method



- フェルミガス模型による核分裂幅
  - 鞍点法による積分評価

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi \exp\left(2\sqrt{a_0 E}\right)} \int_0^{E-B_f} d\varepsilon \exp\left(2\sqrt{a_s (E - B_f - \varepsilon)}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi \exp\left(2\sqrt{a_0 E}\right)} \int_0^{E-B_f} d\varepsilon \exp\left(2\sqrt{a_s (E - B_f)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2(E - B_f)} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi \exp\left(2\sqrt{a_0 E}\right)} \int_0^{E-B_f} d\varepsilon \exp\left(2\sqrt{a_s (E - B_f)}\right) \exp\left(-\varepsilon \sqrt{\frac{a_s}{E - B_f}} \right)$$

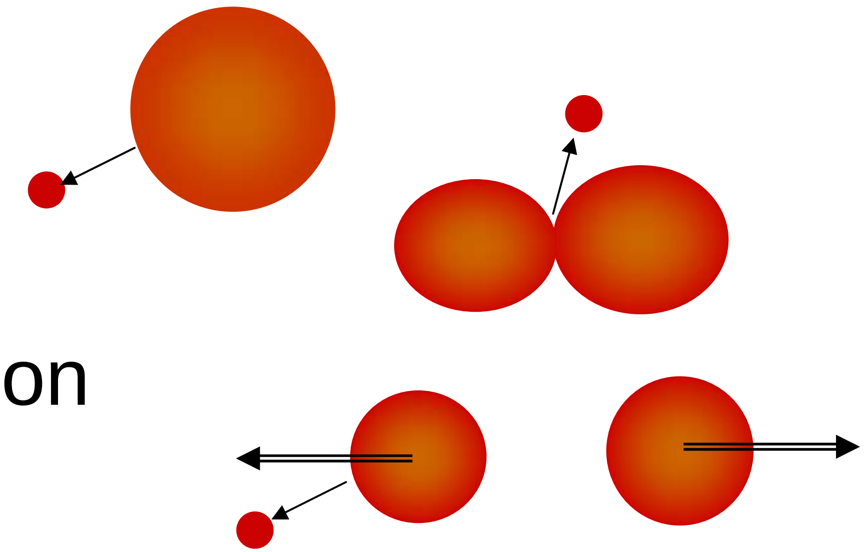
$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E - B_f}{a_s}} \exp\left(2\sqrt{a_s (E - B_f)} - 2\sqrt{a_0 E}\right)$$

核分裂から何を学ぶのか

- 大振幅運動
  - 変形に伴うエネルギー変化
  - 集団運動と散逸
  - 大振幅運動のダイナミクス
- サドル点と分裂の谷
- ネックの形成と断裂
- 分裂時のエネルギー分配
  - 非平衡統計力学
- 分裂片の性質
  - Z,N分布、変形、励起エネルギー

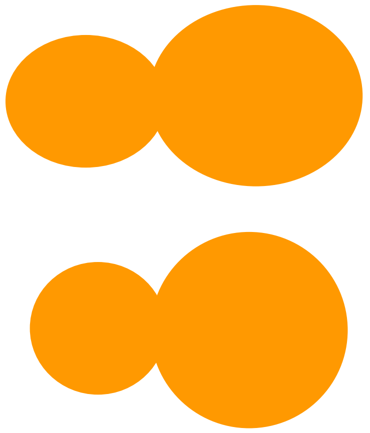
Key quantities in fission

- Fission rate
  - Height of fission barrier
- Neutron emission
  - Pre-scission neutrons
  - Scission neutrons
  - Post-scission neutrons
- Charged particle emission
- Gamma emission
- Fragment mass distribution
- Fragment kinetic energy distribution



Mass & TKE distribution

- Mass distribution is essentially determined by shell correction energy
  - At saddle :position & height fission barrier
  - Fission valleys and ridges
  - Fragments :magic number
- TKE (total kinetic energy)
  - Mainly Coulomb repulsion
  - Scission configuration
    - Nature of nuclear liquid (dissipation)
- Dynamical treatment is necessary

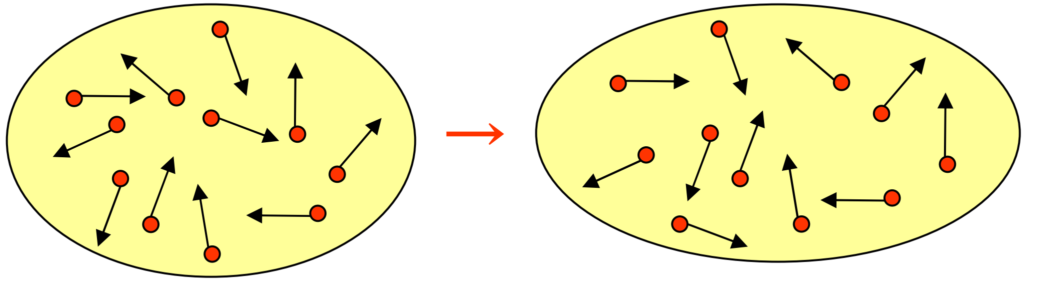


揺動散逸動力学

- ブラウン粒子描像
  - Macroscopic degree(s) of freedom interacting with microscopic degrees of freedom in thermal motion

    散逸(dissipation) ⇐ 摩擦力

    揺動(fluctuation) ⇐ ランダム力



- 巨視的自由度と核子自由度との間のエネルギーの移動
- Macroscopic degrees of freedom

  = 原子核の形

  (elongation, deformation, neck, mass asymmetry etc.)

揺動散逸動力学の基礎方程式

ランジュバン方程式

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m} \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\gamma}{m} p + \sqrt{\gamma T} R(t)$$

$$\langle R(t) \rangle = 0, \ \langle R(t_1) R(t_2) \rangle = 2\delta(t_1 - t_2)$$

ランダム力を含む粒子の運動方程式

フォッカー・プランク(クラマース)方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\gamma}{m}\frac{\partial}{\partial p}(pf) + \gamma T \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$$

粒子の分布関数に対する偏微分方程式

二つの考え方は等価であることが知られている

Kramers理論による核分裂幅

- ポテンシャル障壁を含む拡散問題

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{p}{m}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\gamma}{m}\frac{\partial}{\partial p}(pf) + \gamma T\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$$

- *U* = パラボラ + 逆パラボラ
  - 解析解

$$\Gamma_f = K\frac{\hbar\omega}{2\pi}\exp\left(-\frac{B_f}{T}\right) \qquad U = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \\ B_f - \frac{1}{2}m\omega_B^2(q - q_B)^2 \end{cases}$$

$$K = \frac{1}{2\omega_B}\left[\sqrt{\beta^2 + 4\omega_B^2} - \beta\right], \quad \beta = \frac{\gamma}{m}$$

cf. BW $\quad \Gamma_f = \frac{T}{2\pi}\exp\left(-\frac{B_f}{T}\right)$

動力学パラメータ

- 慣性質量テンソル
  - 流体力学的質量
    - Werner-Wheeler質量
- 摩擦テンソル
  - 一体模型と二体模型
  - One-body friction
    - Wall formulaとWindow formula
    - 核子が一体ポテンシャルとの衝突によってエネルギーを失う
    - 窓を通して核子をやりとりすることでエネルギーを失う
  - Two-body viscosity
    - 核子ー核子衝突によるエネルギー損失

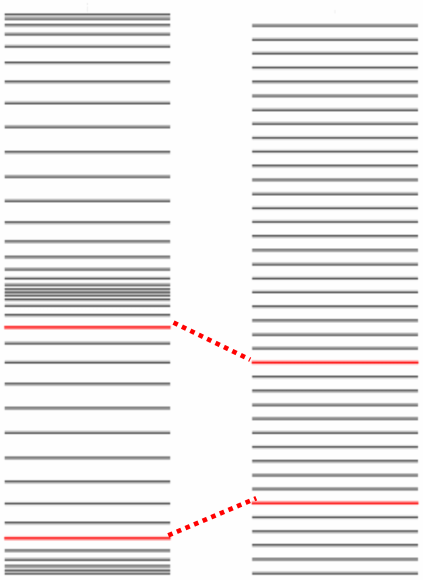
殻補正エネルギー

- 原子核が量子力学系であることの反映
- 特定のZ, Nを持つ原子核が特に安定
  - 閉殻構造

Z, N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 魔法数

^{4}He, ^{16}O, ^{40,48}Ca, ^{56}Ni, ^{132}Sn, ^{208}Pb 魔法核

- 非対称核分裂の起源
  - 液滴模型では対称分裂がもっとも有利
  - ウランは非対称核分裂する
- 超重元素の存在
  - Z=82, N=126の次の魔法数
  - Z=114, N=184という予想



殻補正エネルギー

- 一粒子エネルギーの和と平均とのずれ
- Strutinsky法

$$\Delta E_{shell} = \sum_{i}^{N} \varepsilon_i - \tilde{E}$$

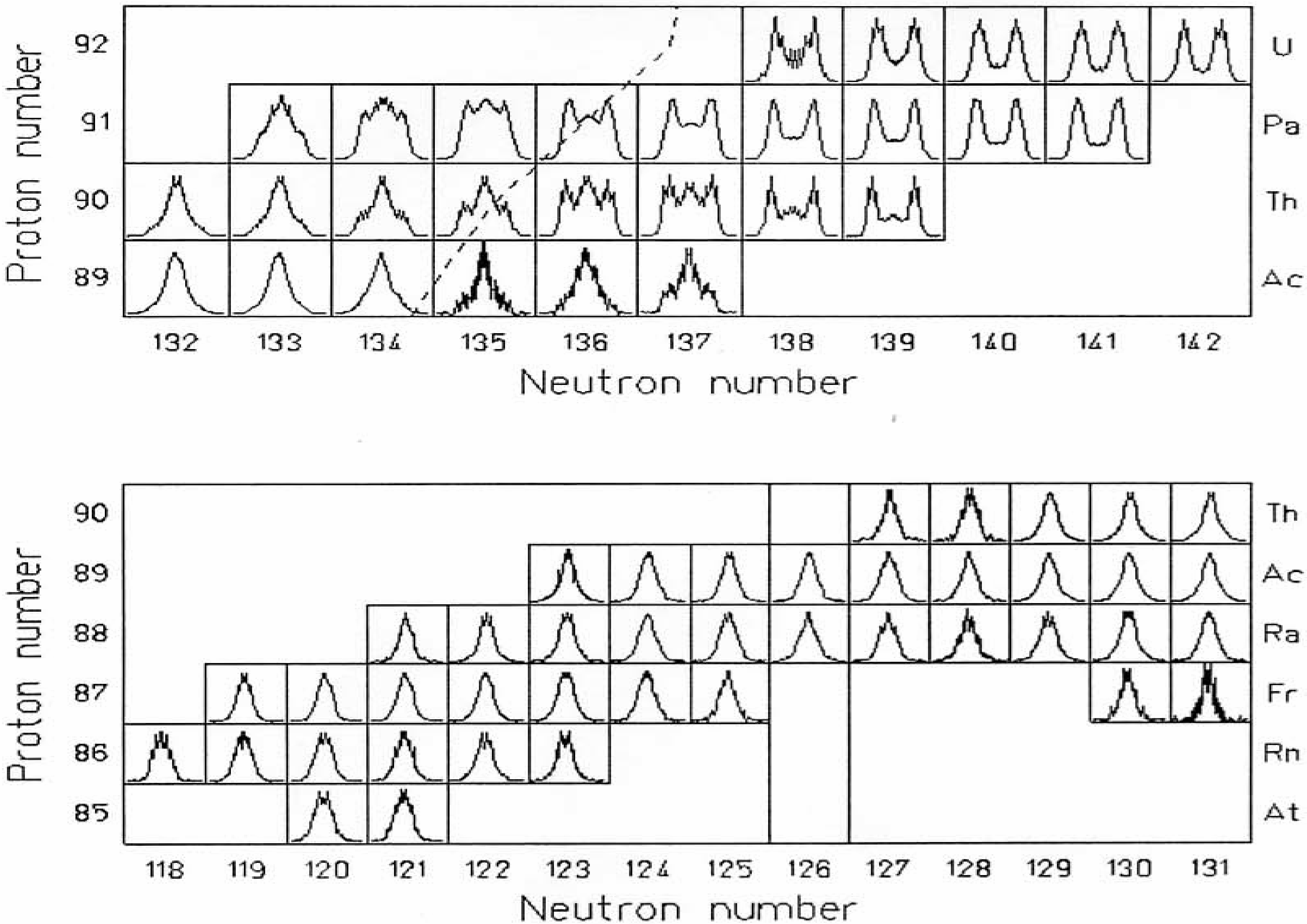
$$N = \int^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\, d\varepsilon \ , \ \tilde{E} = \int^{\varepsilon_F} g(\varepsilon)\varepsilon\, d\varepsilon$$

$$g(\varepsilon) = \sum_{i}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)^2}{2\sigma^2} \right) \sum_{m} H_m \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{\sigma} \right)$$

- 巨視的微視的模型

$$\tilde{E} \to E_{Macro} \ , \ E = E_{Macro} + \Delta E_{shell}$$

Fission modes



K. –H. Schmidt et al.

TKE systematics

- Viola systematics
  (1985, V. E. Viola)

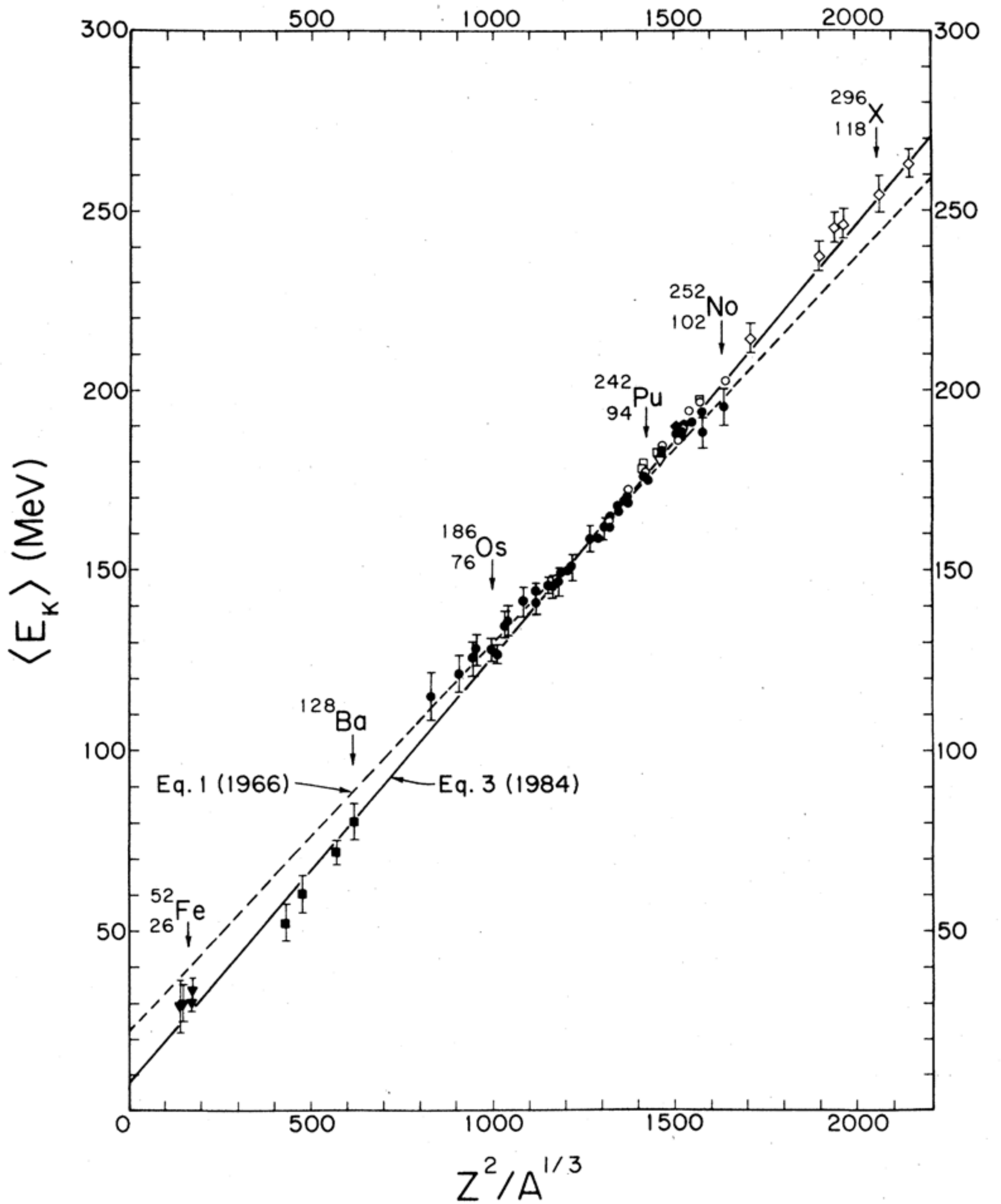
$$\langle E_K \rangle = 0.1071 Z^2/A^{1/3} + 22.2 \text{ MeV}$$

Data before 1966

$$\langle E_K \rangle = 0.1189 Z^2/A^{1/3} + 7.3 \text{ MeV}$$

Data up to 1984

  - TKEは主に断裂時のクーロンエネルギーによって決まる
  - 分裂片の変形に依存



Extension to multi-dimension

Multi-dimensional Langevin equation

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(m^{-1}\right)_{ij} p_j \qquad\qquad i, j, k = 1, \dots, N$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(m^{-1}\right)_{jk} p_j p_k - \gamma_{ij}\left(m^{-1}\right)_{jk} p_k + g_{ij} R_j(t)$$

$$\left\langle R_i(t)\right\rangle = 0, \ \left\langle R_i(t_1) R_j(t_2)\right\rangle = 2\delta_{ij}\delta(t_1 - t_2) \qquad \sum_k g_{ik} g_{jk} = T\gamma_{ij}$$

$m_{ij}(q)$ Hydrodynamical inertial mass

$\gamma_{ij}(q)$ Wall-and-Window (one-body) friction

$V(q)$ Macro-microscopic potential

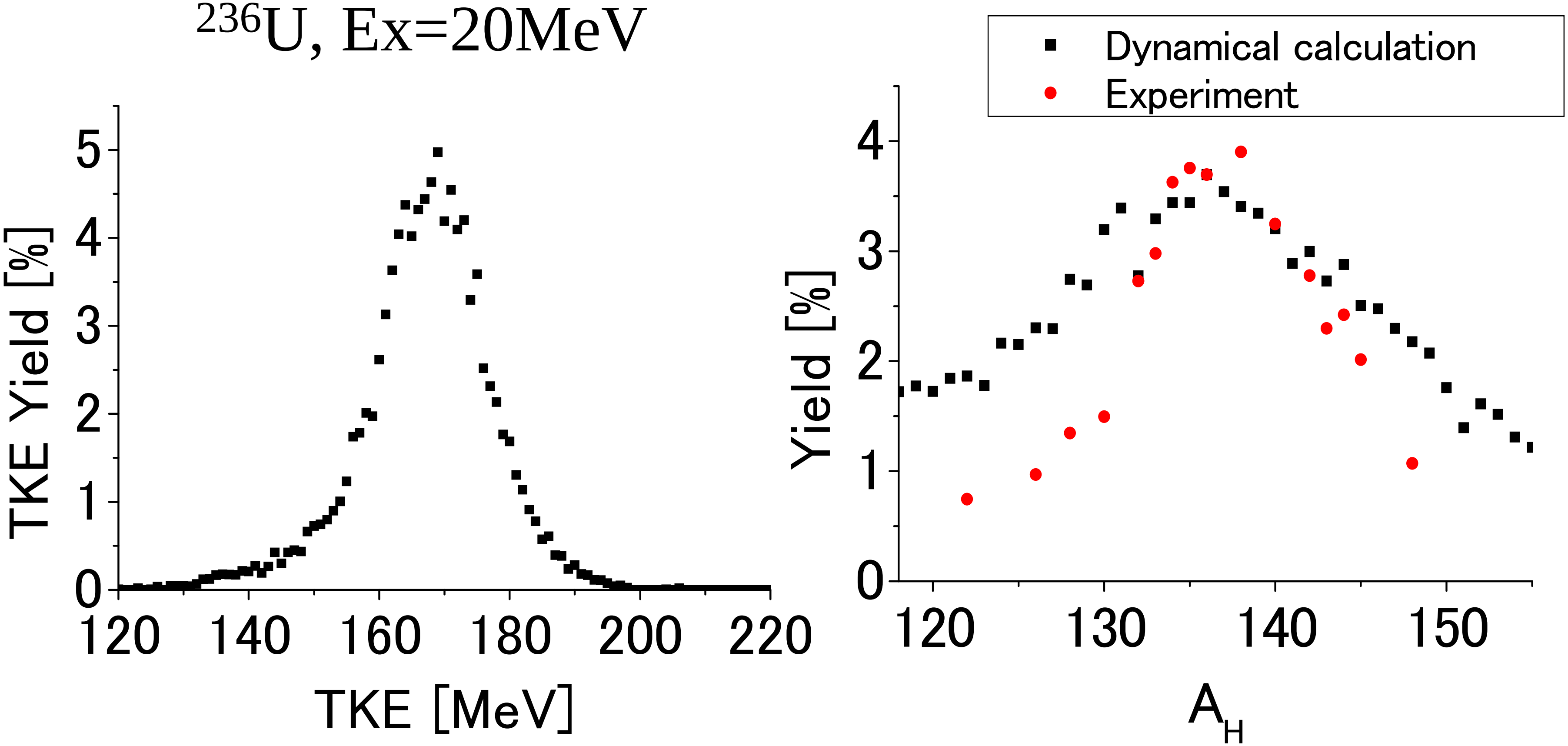
$\{q_i\}$: collective parameters
(elongation, fragment deformation, neck parameter, mass asymmetry)

分裂片のTKE分布と質量分布

３次元ランジュバン計算

elongation, fragment deformation, mass-asymmetry

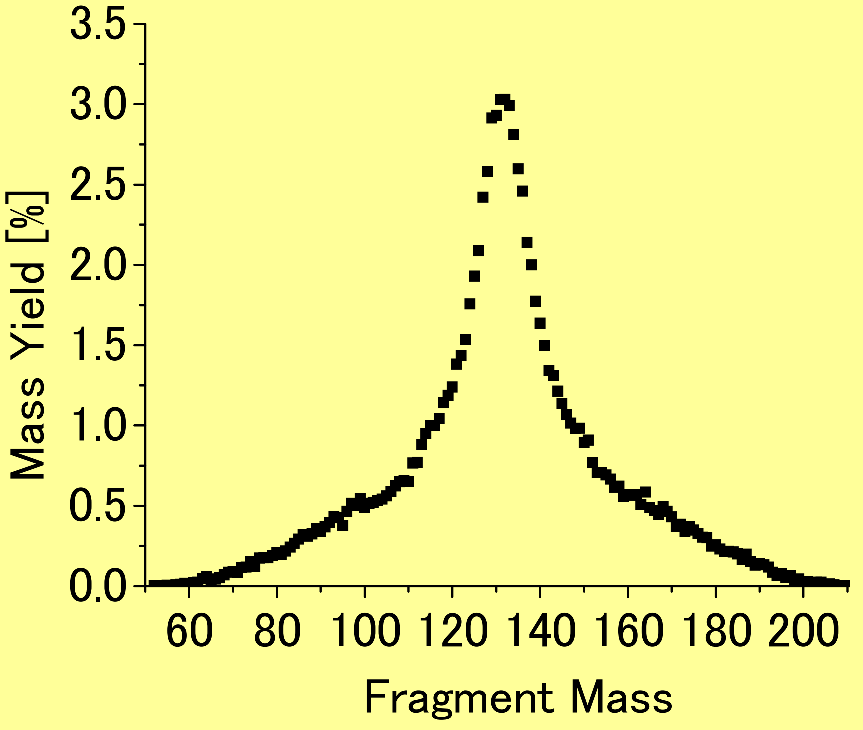
^{236}U, Ex=20MeV

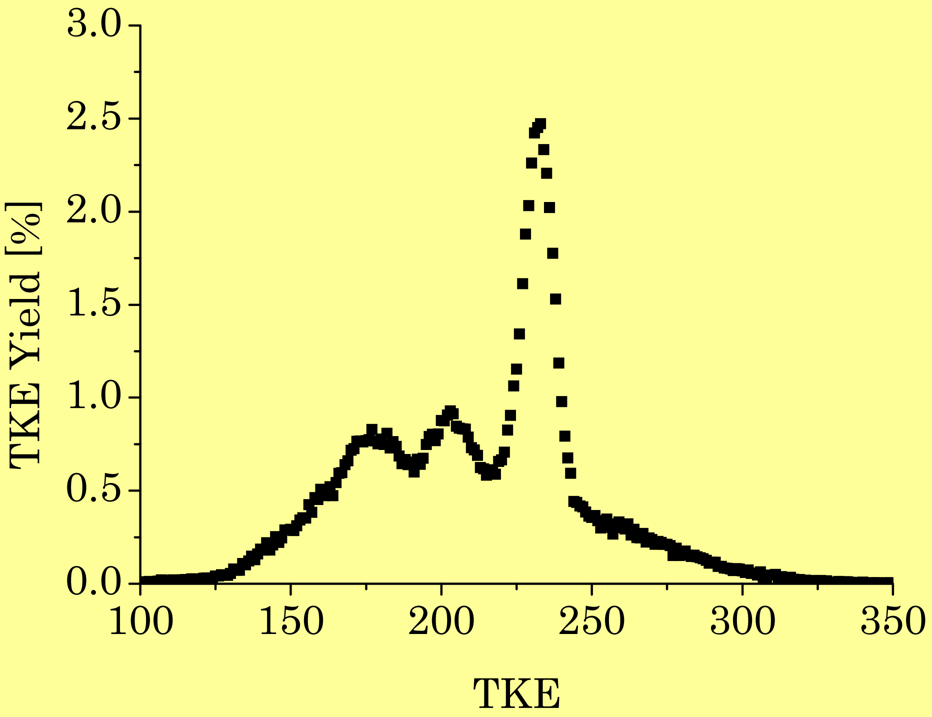


ランジュバン方程式による解析例

３次元ランジュバン計算

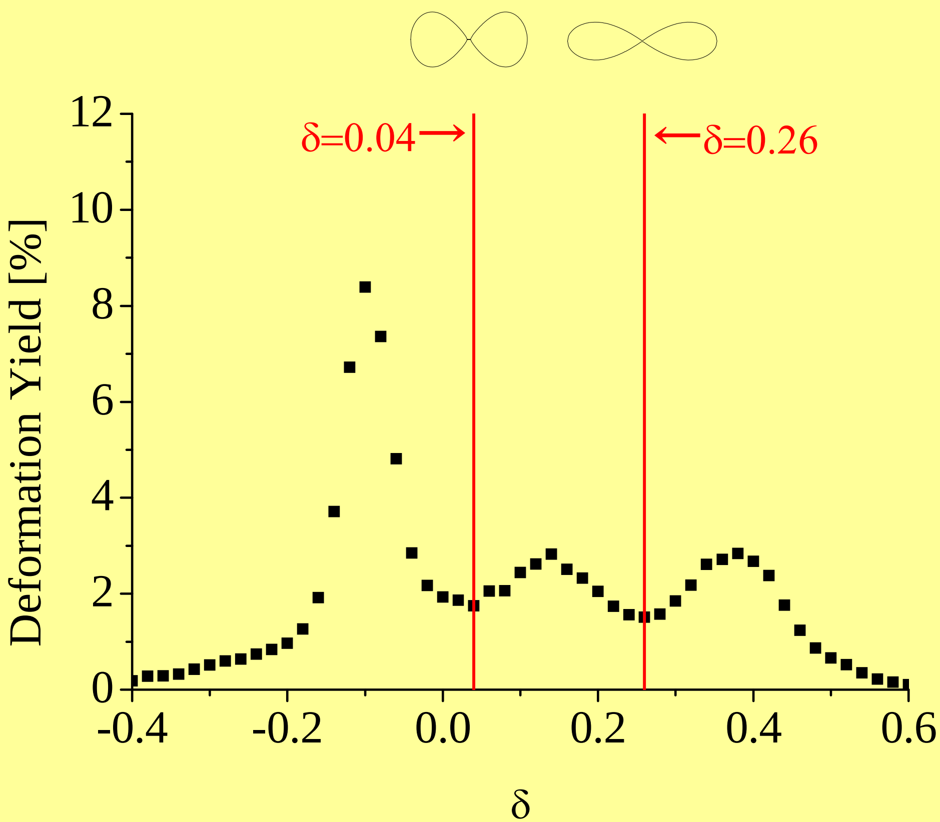
^{264}Fm, Ex=10MeV



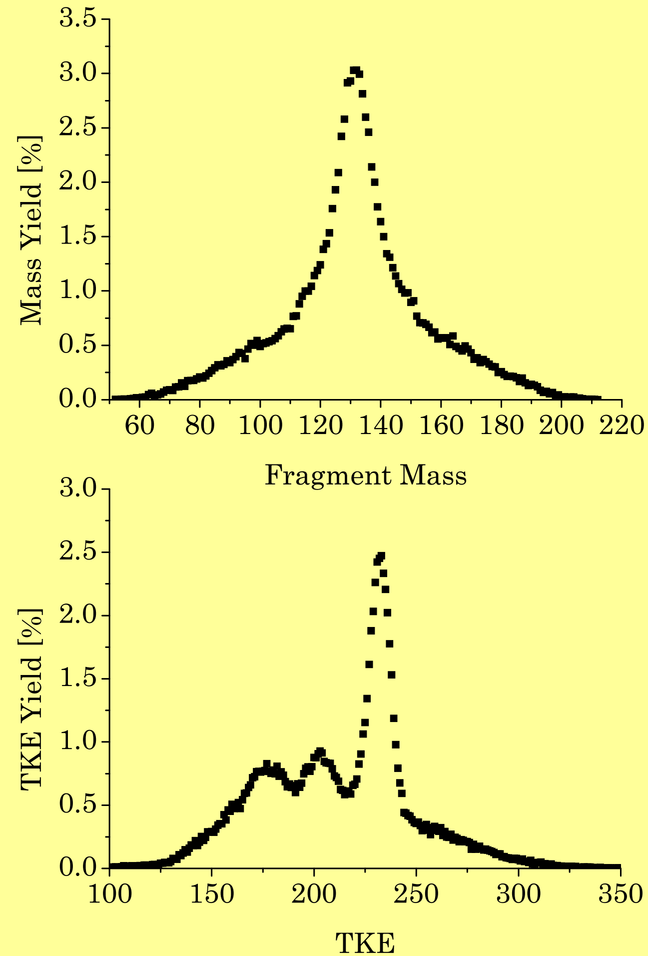


Numbers of the peaks are different in mass and TKE

分裂点の変形度分布



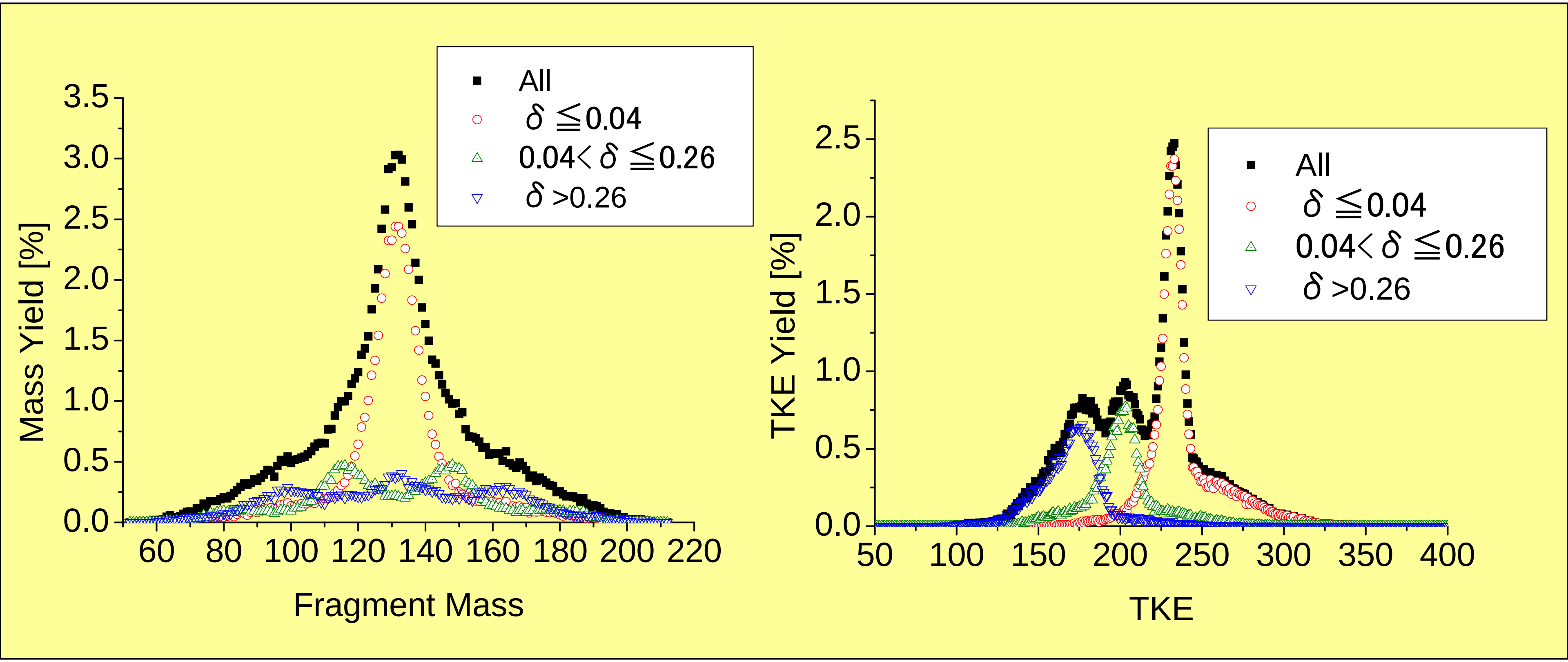
δ=0.04
δ=0.26
Deformation Yield [%]
δ
12
10
8
6
4
2
0
-0.4
-0.2
0.0
0.2
0.4
0.6



Mass Yield [%]
Fragment Mass
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
60
80
100
120
140
160
180
200
220
TKE Yield [%]
TKE
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
100
150
200
250
300
350

Fission modes

T. Asano et al,（J. Nucl. Radiochem. Sci. 5 (2004) 1）



δ ≦0.04 : Mass-symmetric & High TKE mode

0.04< δ ≦0.26 : Mass-asymmetric & Medium TKE mode

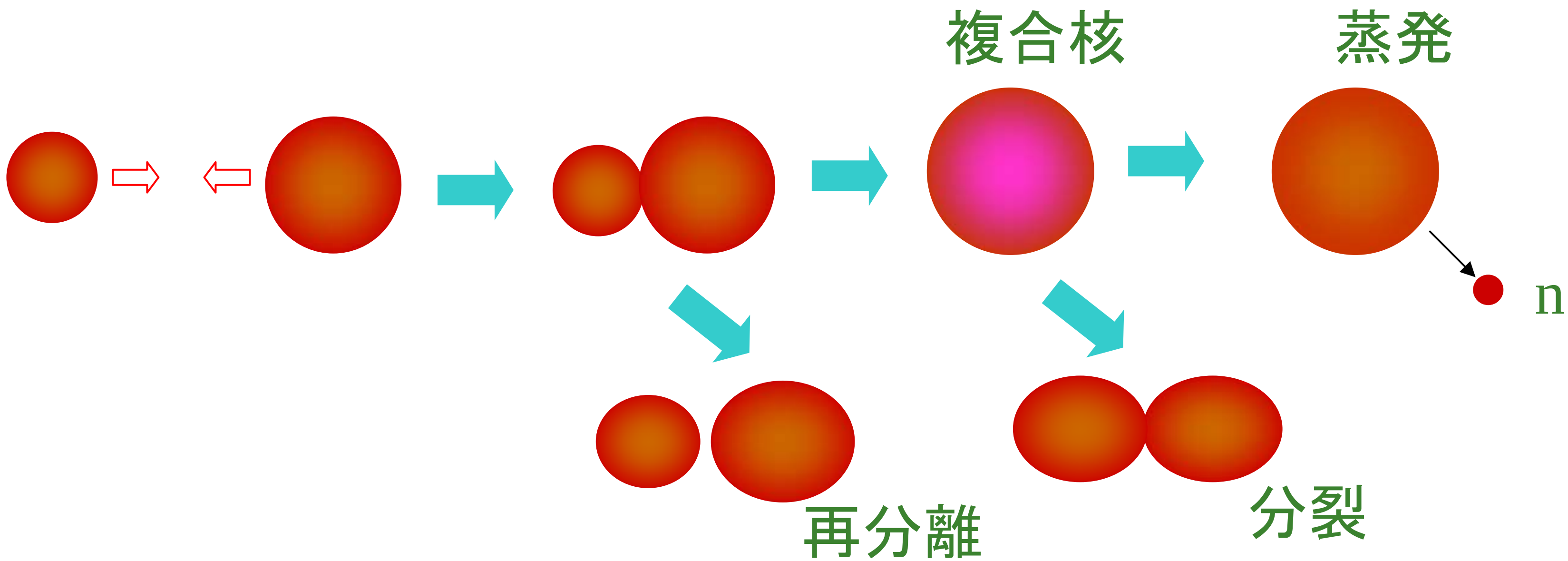
δ >0.26 : Mass-symmetric ? & Low TKE mode

Superheavy Elements

- How many elements can exist in nature?
  - Stability against fission
- Superheavy elements
  - Shell-stabilized : No macroscopic fission barrier
- Heavy-ion fusion reaction
  - Hot fusion reaction
    - Actinide target + ^{48}Ca projectile
    - E_{ex} = 30-40 MeV
  - Cold fusion reaction
    - Pb, Bi target
    - E_{ex} = 10-15 MeV

重イオン核融合反応

- 加速器によって2つの原子核を融合して、原子番号の大きい原子核を作る
  - 例　$^{209}_{83}\mathrm{Bi} + ^{70}_{30}\mathrm{Zn} \rightarrow ^{278}_{113}113 + ^{1}_{0}n$



重い原子核同士の融合反応

- 軽い原子核の場合、原子核同士が接触すると融合する
- 重い原子核では、接触しても融合に至らない場合がある
  - Fusion hindrance
  - Extra push模型
    入射チャネルのクーロン障壁の奥に、融合障壁が存在する
- 超重元素合成反応を考えるにはFusion hindranceを考慮する必要がある
  - ランジュバン方程式による融合確率の計算
  - Fusion-fission反応とQuasi-fission反応

Fusion hindrance（1次元模型）

$$U = U_B - \frac{1}{2} m\omega_B^2 q^2$$ Parabolic barrier

- Formation probability

$$P^{for} = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left[\left(\frac{aB^2}{K-B}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{\beta+\beta'}{2\beta}}\left(1-\frac{2\omega_B}{\beta+\beta'}\sqrt{\frac{K}{B}}\right)\right]$$

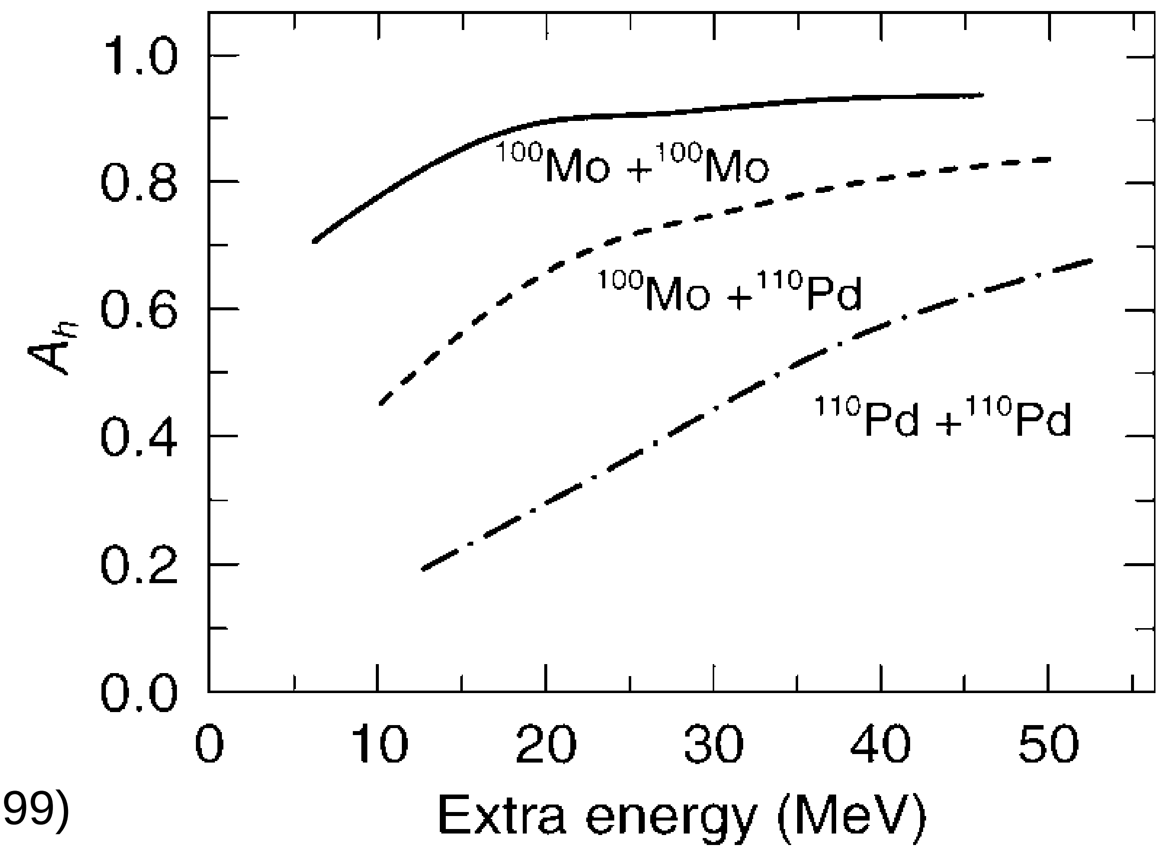
B: extra barrier height
K: extra kinetic energy (at contact)
a: level density parameter
β: reduced friction parameter

- Strong friction

$$P^{for} = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left[\left(\frac{aB^2}{K-B}\right)^{1/4}\left(1-\frac{\omega_B}{\beta}\sqrt{\frac{K}{B}}\right)\right] \qquad \beta' = \sqrt{\beta^2 + 4\omega_B^2}$$

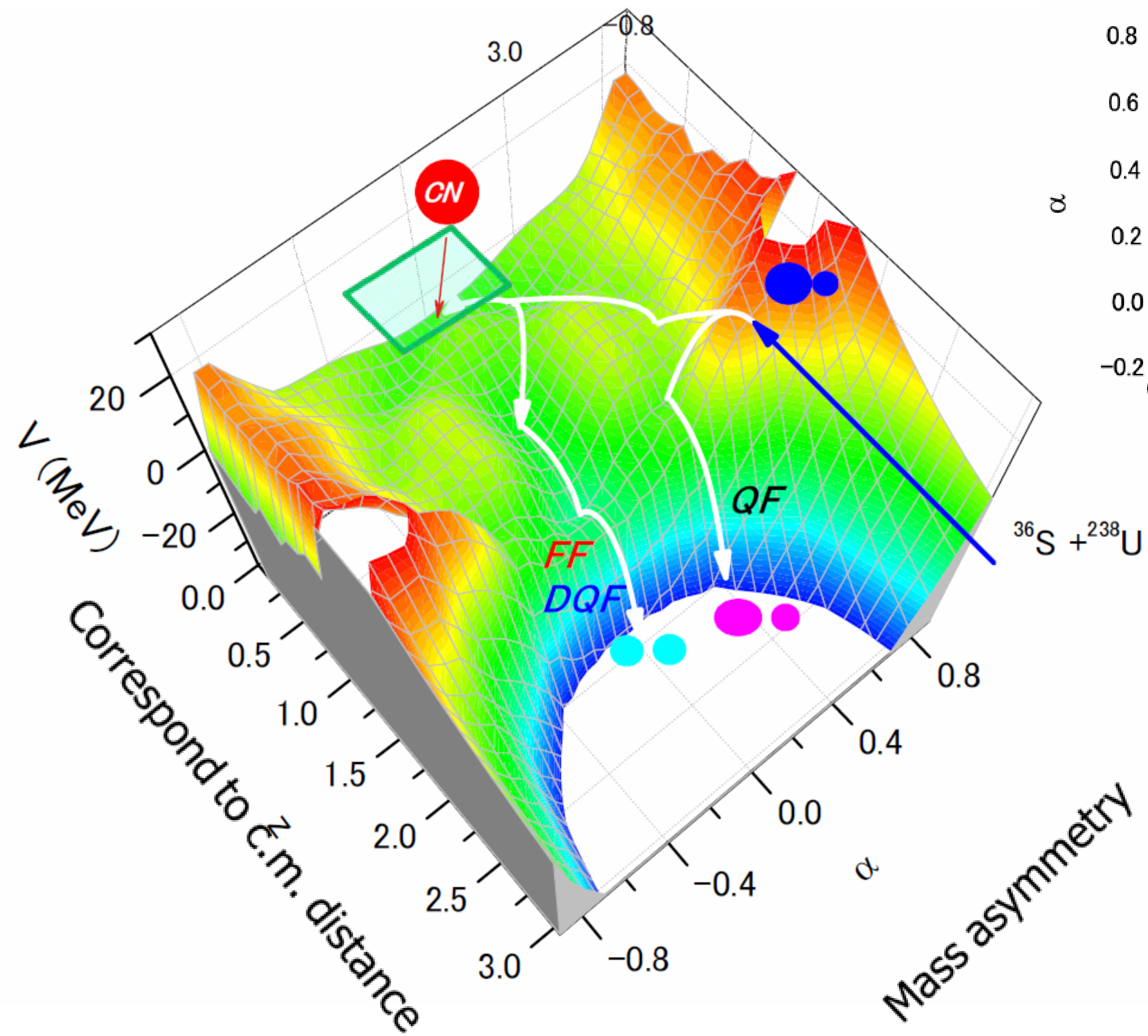
Fusion hindrance

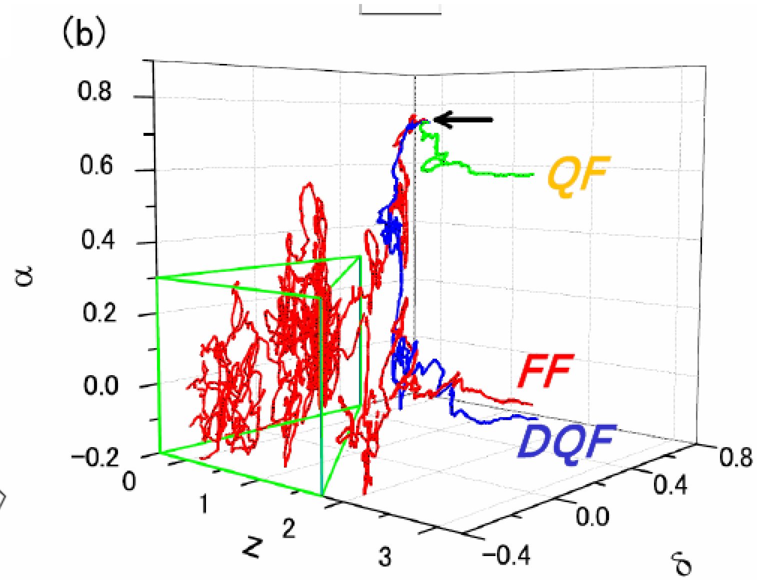
- Extra energy is necessary for fusion
  - Two-dimensional Langevin calculation
  - $Z_1 X Z_2 > 1600$
  - Dissipation of relative motion



Tokuda, Wada (1999)

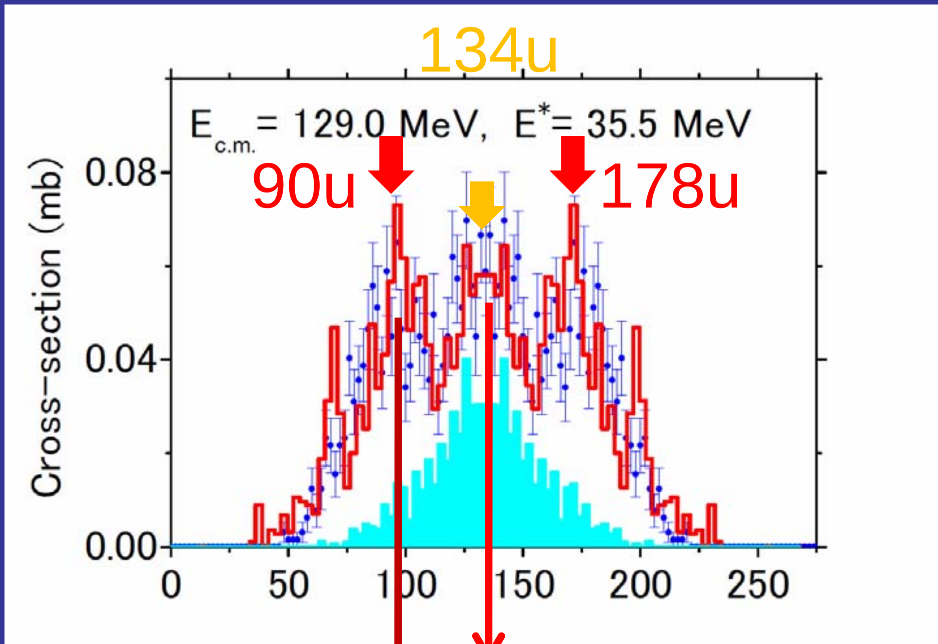
Overview of Dynamical Process in reaction $^{36}S+^{238}U$





Calculation by Aritomo

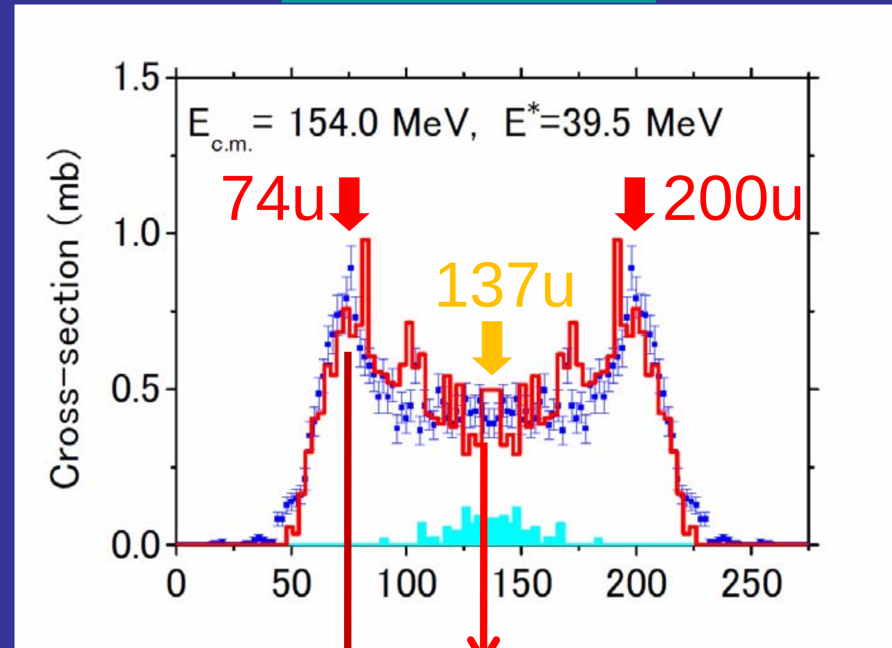
$^{30}Si + ^{238}U$



FF and DQF
t > 50 x 10^{-21} sec
-0.2 < δ < 0.2 (peak 0)

QF via mono-nucleus
t < 30 x 10^{-21} sec
0.2 < δ < 0.5 (peak 0.4)

$^{36}S + ^{238}U$



FF and **DQF**
t < 30 x 10^{-21} sec
0 < δ < 0.4 (peak 0.2)

QF
t < 10 x 10^{-21} sec
0 < δ < 0.2 (peak 0)

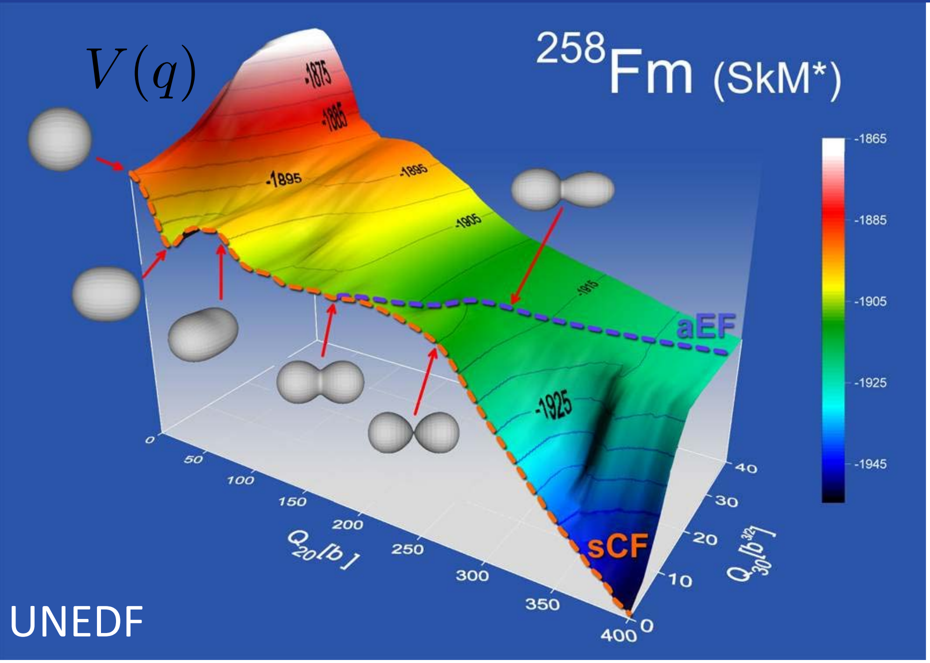
(1) Origin of the reaction process
(2) Building times
(3) Deformation of fragments

Calculation by Aritomo

最近の発展：微視的アプローチ

- 原子核の質量公式
  - 巨視的微視的模型＝Strutinsky法
  - 微視的模型＝自己無撞着平均場近似
    - Hartree-Fock-Bogoliubov
    - Density functional
    - Relativistic mean field
- 変形ポテンシャル
  - Constraint HFB
- ダイナミカルなアプローチ
  - 微視的変形ポテンシャル＋輸送パラメータ
  - TDHFB法

Toward a microscopic description of fission dynamics



Hamiltonian for fission dynamics

$$H = \frac{1}{2}\sum_{kl}\mathcal{M}_{kl}(q)\dot{q}_k\dot{q}_l + V_{\rm coll}(q)$$

Dynamical variables: $q = (q_1, \cdots, q_n)$

characterizing a shape of the fissioning nucleus

$\beta_{20}, \beta_{22}, \beta_{30}, \beta_{40}, \cdots$

What we need is

Collective mass parameters (inertia functions): $\mathcal{M}_{kl}(q)$

Collective potential : $V(q)$

Microscopic input: Skyrme energy-density functional

$$\mathcal{E}_{\rm Sky} = \sum_{t=0,1}\Big\{C_t^\rho[\rho_{00}]\rho_{t0}^2 + C_t^s[\rho_{00}]\boldsymbol{s}_{t0}^2 + C_t^{\triangle\rho}\rho_{t0}\triangle\rho_{t0} + C_t^{\triangle s}\boldsymbol{s}_{t0}\cdot\triangle\boldsymbol{s}_{t0}$$
$$+ C_t^\tau(\rho_{t0}\tau_{t0} - \boldsymbol{j}_{t0}^2) + C_t^T(\boldsymbol{s}_{t0}\cdot\boldsymbol{T}_{t0} - \overleftrightarrow{J}_{t0}^2) + C_t^{\nabla J}(\rho_{t0}\nabla\cdot\boldsymbol{J}_{t0} + \boldsymbol{s}_{t0}\cdot\nabla\times\boldsymbol{j}_{t0})\Big\}$$

Time-odd components

no contribution for the ground state

Local QRPA method:
N.Hinohara *et al.*, PRC82(2010)064313

Constrained HFB + local QRPA

$V(q)$

$\mathcal{M}_{kl}(q)$

Thouless-Valatin procedure extended to non-equilibrium points

✓The local QRPA eqs. on top of the constrained HFB state

$$\langle\phi(\beta)|[\hat{H}_{\mathrm{CHFB}}, \hat{Q}^{\nu}] - \frac{\hat{P}_{\nu}}{i}|\phi(\beta)\rangle = 0,$$

$$\langle\phi(\beta)|[\hat{H}_{\mathrm{CHFB}}, \frac{\hat{P}_{\nu}}{i}] - \omega_{\nu}^{2}\hat{Q}^{\nu}|\phi(\beta)\rangle = 0,$$

$$\langle\phi(\beta)|[\hat{Q}^{\mu}, \frac{\hat{P}_{\nu}}{i}]|\phi(\beta)\rangle = \delta^{\mu}_{\nu}.$$

The most collective K=0+ mode selected: $\hat{P}_{\beta}$

$\boxed{\mathcal{M}_{\beta}(\beta)}$ Collective vibrational mass for β direction

$$\mathcal{M}_{\beta}(\beta) = \frac{dq^{\beta}}{d\hat{Q}_{20}}\frac{dq^{\beta}}{d\hat{Q}_{20}}, \qquad \frac{d\hat{Q}_{20}}{dq^{\beta}} = \langle\phi(\beta)|[\hat{Q}_{20}, \frac{\hat{P}_{\beta}}{i}]|\phi(\beta)\rangle$$

今後の展望

- 核分裂の全過程の記述
  - 分裂片の全運動エネルギー･質量分布
  - 粒子放出過程
- 巨視的模型
  - 多自由度空間でのダイナミクス
  - 量子力学的ランジュバン方程式
- 微視的模型
  - 動力学過程の理解
- 不安定核の分裂
  - r-process における役割
- 自発核分裂の理解